

第3章 機 率

3-1 樣本空間與事件

重點一 樣本空間

例題 1

連續投擲一公正骰子兩次，則：

(1) 樣本空間 S 為_____。(4分)

(2) 共有_____個樣本點。(4分)

解 (1) 以 (a, b) 表示第一次擲出 a 點，第二次擲出 b 點，則樣本空間

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

(2) 共 $6^2=36$ 個樣本點

例題 2

甲、乙、丙三人要以抽籤決定代表，試回答下列各題：

(1) 抽籤決定一人為代表之樣本空間 S 為_____，共有_____個樣本點。(6分)

(2) 抽籤決定兩人為代表之樣本空間 S 為_____，共有_____個樣本點。(6分)

解 (1) $S = \{\text{甲}, \text{乙}, \text{丙}\}$ ，

$$\text{共 } C_1^3 = 3 \text{ 個樣本點}$$

(2) $S = \{\text{甲乙}, \text{甲丙}, \text{乙丙}\}$

$$\text{共 } C_2^3 = 3 \text{ 個樣本點}$$

例題 3

一盒中有紅、白、黑三色球各一，試驗過程是由盒中取出一球，看清楚顏色後放回，再從中取出一球，則：

(1) 此次試驗的樣本空間為_____。(4分)

(2) 共有_____個樣本點。(4分)

解 (1) 以紅、白、黑分別表紅球、白球、黑球

$$\text{則樣本空間 } S = \{(\text{紅}, \text{紅}), (\text{紅}, \text{白}), (\text{紅}, \text{黑}), (\text{白}, \text{紅}), (\text{白}, \text{白}), (\text{白}, \text{黑}), (\text{黑}, \text{紅}), (\text{黑}, \text{白}), (\text{黑}, \text{黑})\}$$

(2) 共 $3^2=9$ 個樣本點

例題 4

設袋中有 8 顆球，其上均標有號碼 1 號、2 號、3 號、4 號各有兩顆，今自袋中任取兩顆球（不考慮順序），則：

(1) 樣本空間 S 為_____。(4 分)

(2) 共有_____個樣本點。(4 分)

解 (1) $S = \{11, 12, 13, 14, 22, 23, 24, 33, 34, 44\}$

這相當於“從 1、2、3、4 這四種不同的物品中選出 2 個的重複組合”

(2) 共 $C_2^{4+2-1} = C_2^5 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$ 個樣本點

重點二 事件**例題 5**

設 S 表投擲一公正骰子的樣本空間， A 表出現偶數點的事件， B 表不超過 3 的事件，則：

(1) 樣本空間 S 為_____。(2 分)

(2) 共有_____個事件。(2 分)

(3) A 事件為_____。(2 分)

(4) B 事件為_____。(2 分)

(5) A 與 B 的和事件為_____。(2 分)

(6) A 與 B 的積事件為_____。(2 分)

(7) A, B 是否互斥？答：_____。(2 分)

解 (1) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(2) 共有 $2^6 = 64$ 個事件

(3) $A = \{2, 4, 6\}$

(4) $B = \{1, 2, 3\}$

(5) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

(6) $A \cap B = \{2\}$

(7) $\because A \cap B \neq \emptyset \therefore A, B$ 沒有互斥

例題 6

擲一顆公正的骰子兩次，設 A 表第一次出現偶數點的事件， B 表至少有一次出現 3 點的事件， C 表點數和大於 5 且小於 7 的事件，則：

- (1) 事件 A 為_____。(2 分)
- (2) 事件 B 為_____。(2 分)
- (3) 事件 C 為_____。(2 分)
- (4) A 與 B 的積事件為_____。(2 分)
- (5) B 與 C 的積事件為_____。(2 分)

解 (1) $A = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$
 (2) $B = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$
 (3) $C = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$
 (4) A 與 B 的積事件為 $A \cap B = \{(2, 3), (4, 3), (6, 3)\}$
 (5) B 與 C 的積事件為 $B \cap C = \{(3, 3)\}$

例題 7

丟一枚均勻硬幣三次，依次觀察出現正面 (H)、反面 (T) 的情形，設 A 表示三次均出現同一面的事件， B 表示恰有一次正面的事件，則：

- (1) 樣本空間 S 為_____。(4 分)
- (2) 事件 A 為_____。(4 分)
- (3) 事件 B 為_____。(4 分)
- (4) A 和 B 是否互斥？答：_____。(4 分)

解 (1) $S = \{(H, H, H), (H, H, T), (H, T, H), (H, T, T), (T, H, H), (T, H, T), (T, T, H), (T, T, T)\}$
 (2) $A = \{(H, H, H), (T, T, T)\}$
 (3) $B = \{(H, T, T), (T, H, T), (T, T, H)\}$
 (4) $\because A \cap B = \emptyset \quad \therefore A, B$ 互斥

例題 8

設樣本空間 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，則 S 中：

- (1) 所有的事件共有 _____ 個。(3 分)
- (2) 恰含有兩個樣本點的事件有 _____ 個。(3 分)
- (3) 至少含有四個樣本點的事件有 _____ 個。(3 分)

解 (1) $2^6 = 64$ (個)

$$(2) C_2^6 = \frac{6 \times 5}{2} = 15 \text{ (個)}$$

$$(3) C_4^6 + C_5^6 + C_6^6 \\ = 15 + 6 + 1 \\ = 22 \text{ (個)}$$

例題 9

設樣本空間 $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ，事件 $A = \{1, 2\}$ ，試求：

- (1) S 共有 _____ 個不同的事件。(3 分)
- (2) 列出與 A 互斥的事件。(3 分)

解 (1) $n(S) = 5$

故 S 的事件共有 $2^5 = 32$ (個)

(2) 與 A 互斥的事件有 $\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{3, 4, 5\}$ ，共 8 個

例題 10

依序擲 4 個公正的骰子，設：

- (1) A 代表骰子點數皆相異的事件 (如 1, 3, 5, 4)，則 $n(A) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(3 分)
- (2) B 代表骰子點數恰成一對的事件 (如 3, 3, 4, 6)，則 $n(B) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(3 分)
- (3) C 代表骰子點數恰成兩對的事件 (如 2, 2, 4, 4)，則 $n(C) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(3 分)

解 (1) $n(A) = P_4^6 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

$$(2) n(B) = C_1^6 C_2^5 \times \frac{4!}{2!1!1!} = 720$$

$$(3) n(C) = C_2^6 \times \frac{4!}{2!2!} = 90$$