1-2　級　數

重點一　等差級數與等比級數

例題 1

試求下列等差級數的和：

(1) $2+5+8+\cdots\cdots+35=$______。(5 分)

(2) $8+7\frac{1}{2}+7+6\frac{1}{2}+\cdots\cdots+1\frac{1}{2}=$______。(5 分)

解　(1) $\because$ 首項 $a_1=2$，公差 $d=3$

又 $a_n=a_1+(n-1)d \Rightarrow 35=2+(n-1)\times 3 \Rightarrow n=12$

故等差級數的和為 $\frac{12\times(2+35)}{2}=222$

(2) $\because$ 首項 $a_1=8$，公差 $d=-\frac{1}{2}$

又 $a_n=a_1+(n-1)d \Rightarrow 1\frac{1}{2}=8+(n-1)\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)(n-1)=-6\frac{1}{2} \Rightarrow n-1=13 \Rightarrow n=14$

故等差級數的和為 $\frac{14\times\left(8+1\frac{1}{2}\right)}{2}=\frac{133}{2}$

例題 2

(1) 若數列 $\langle a_n \rangle$：2，5，8，11，14，17，……為等差數列，則第 n 項 $a_n=$______，前 n 項和 $S_n=$______。(6 分)

(2) 若數列 $\langle a_n \rangle$ 為等差數列，且 $a_6=7$，公差 $d=-4$，則第 n 項 $a_n=$______，前 n 項和 $S_n=$______。(6 分)

解　(1) 由題意知首項 $a_1=2$，公差 $d=3$

$\Rightarrow a_n=a_1+(n-1)d=2+(n-1)\times 3=3n-1$

$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{n}{2}[2+(3n-1)]$

$=\frac{n}{2}(3n+1)=\frac{3n^2}{2}+\frac{n}{2}$

(2) $\because a_6=a_1+(6-1)\times d$

$\Rightarrow 7=a_1+5\times(-4) \Rightarrow a_1=27$

$\Rightarrow a_n=a_1+(n-1)d=27+(n-1)\times(-4)=-4n+31$

$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{n}{2}[27+(-4n+31)]=n(-2n+29)=-2n^2+29n$

例題 3

試求下列等比級數的和：

(1) $1+2+4+\cdots\cdots+1024=$______。（3 分）

(2) $243-81+27-9+\cdots\cdots+\dfrac{1}{27}=$______。（3 分）

(3) $1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{25}+\cdots\cdots+\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}=$______。（3 分）

解　(1) 首項 $a_1=1$，公比 $r=2$

又 $a_n=a_1r^{n-1}$ ⇨ $1\times 2^{n-1}=1024$ ⇨ $2^{n-1}=2^{10}$ ⇨ $n-1=10$ ⇨ $n=11$

故等比級數的和為 $\dfrac{1\times(1-2^{11})}{1-2}=2^{11}-1=2048-1=2047$

(2) 首項 $a_1=243$，公比 $r=-\dfrac{1}{3}$

又 $a_n=a_1r^{n-1}$ ⇨ $243\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{27}$

⇨ $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{8}$

⇨ $n-1=8$ ⇨ $n=9$

故等比級數的和為 $\dfrac{243\left[1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{9}\right]}{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)}=\dfrac{3}{4}\times 243\times\left[1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{9}\right]$

$=\dfrac{3}{4}\times\left(243+\dfrac{1}{81}\right)=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{19684}{81}$

$=\dfrac{4921}{27}=182\dfrac{7}{27}$

(3) 首項 $a_1=1$，公比 $r=\dfrac{1}{5}$，共 n 項

故等比級數的和為 $\dfrac{1\times\left[1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n}\right]}{1-\dfrac{1}{5}}=\dfrac{5}{4}\times\left[1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n}\right]$

例題 4

(1) 等比級數 $1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\cdots\cdots+\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\cdots\cdots$的前 n 項和為______。（5 分）

(2) 若首項為 9，公比為 3 的等比級數其前 n 項和為 3276，則 $n=$______。（5 分）

解　(1) 首項為 1，公比為 $-\frac{2}{3}$ 的等比級數

其前 n 項和

$$S_n=\frac{1\left[1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{3}{5}\times\left[1-\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

(2) 由題意知 $a_1=9$，$r=3$

⇨ $S_n=\frac{9\times(3^n-1)}{3-1}=3276$

⇨ $9\times(3^n-1)=6552$

⇨ $3^n-1=728$

⇨ $3^n=729$ ⇨ $n=6$

例題 5

設一數列〈a_n〉前 n 項和 $S_n=-3n^2+4n$，則：

(1) 第 10 項為______。（5 分）

(2) 第 n 項為______。（5 分）

解　(1) $a_{10}=S_{10}-S_9$

$=(-3\times10^2+4\times10)-(-3\times9^2+4\times9)$

$=-260+207=-53$

(2) 當 $n\geq2$ 時

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(-3n^2+4n)-[-3(n-1)^2+4(n-1)]$

$=(-3n^2+4n)-(-3n^2+10n-7)$

$=-6n+7$

又當 $n=1$ 時

$a_1=-6+7=1$，$S_1=-3\times1^2+4\times1=1$

$\therefore a_1=S_1$

故 $a_n=-6n+7$，對所有的自然數 n 均成立

重點二　Σ的意義與性質

例題 6

試將下列級數用Σ符號表示：

(1) $2+4+6+\cdots\cdots+200$。（2 分）

(2) $4-2+1-\dfrac{1}{2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{16}$。（2 分）

(3) $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots\cdots+99\times100$。（2 分）

(4) $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n^2}$。（2 分）

(5) $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots\cdots+(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$。（2 分）

解　(1) $2+4+6+\cdots\cdots+200=\sum_{k=1}^{100}2k$

(2) $4-2+1-\dfrac{1}{2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{16}=\sum_{k=1}^{7}4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$

(3) $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots\cdots+99\times100=\sum_{k=1}^{99}k(k+1)$

(4) $1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n^2}=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$

(5) $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots\cdots+(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\dfrac{1}{k}$

例題 7

(1) 若 $\sum_{k=1}^{10}a_k=38$，$\sum_{k=1}^{10}b_k=65$，則 $\sum_{k=1}^{10}(3a_k-4b_k-5)=$______。（5 分）

(2) 設 a，b 是實數，若 $\sum_{k=1}^{4}(ak^2+b)=38$，$\sum_{k=1}^{3}(ak^2-b)=8$，

則數對 $(a,b)=$______。（5 分）

解　(1) $\sum_{k=1}^{10}(3a_k-4b_k-5)=\sum_{k=1}^{10}3a_k+\sum_{k=1}^{10}(-4b_k)+\sum_{k=1}^{10}(-5)$

$=3\sum_{k=1}^{10}a_k-4\sum_{k=1}^{10}b_k-\sum_{k=1}^{10}5$

$=3\times38-4\times65-10\times5=114-260-50=-196$

(2) $\sum_{k=1}^{4}(ak^2+b)=(a+b)+(4a+b)+(9a+b)+(16a+b)=38$

$\sum_{k=1}^{3}(ak^2-b)=(a-b)+(4a-b)+(9a-b)=8$

$\Rightarrow\begin{cases}30a+4b=38\\14a-3b=8\end{cases}$，解之得 $a=1$，$b=2$

故數對 $(a,b)=(1,2)$

例題 8

試求下列各級數的和：

(1) $\sum_{k=1}^{20}(3k-1)=$______。（3 分）

(2) $\sum_{k=1}^{10}(3\times 2^k+1)=$______。（3 分）

(3) $\sum_{k=11}^{20}(6k-7)=$______。（3 分）

解　(1) $\sum_{k=1}^{20}(3k-1)=\sum_{k=1}^{20}3k-\sum_{k=1}^{20}1$

$=3\sum_{k=1}^{20}k-\sum_{k=1}^{20}1$

$=3\times(1+2+3+\cdots\cdots+20)-1\times 20$

$=3\times\frac{20\times 21}{2}-20$

$=630-20$

$=610$

(2) $\sum_{k=1}^{10}(3\times 2^k+1)=\sum_{k=1}^{10}(3\times 2^k)+\sum_{k=1}^{10}1$

$=3\sum_{k=1}^{10}2^k+\sum_{k=1}^{10}1$

$=3(2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^{10})+1\times 10$

$=3\times\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}+10$

$=3\times 2\times(1024-1)+10$

$=6148$

(3) $\sum_{k=11}^{20}(6k-7)=\sum_{k=1}^{20}(6k-7)-\sum_{k=1}^{10}(6k-7)$

$=(6\sum_{k=1}^{20}k-\sum_{k=1}^{20}7)-(6\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}7)$

$=\left(6\times\frac{20\times 21}{2}-7\times 20\right)-\left(6\times\frac{10\times 11}{2}-7\times 10\right)$

$=(1260-140)-(330-70)$

$=860$

例題 9

試求下列各級數的和：

(1) $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+20^2=$______。（3 分）

(2) $6^3+7^3+8^3+\cdots\cdots+15^3=$______。（3 分）

(3) $1\times4+2\times7+3\times10+4\times13+\cdots\cdots+n(3n+1)=$______。（4 分）

解　(1) $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+20^2$

$$=\sum_{k=1}^{20}k^2=\frac{20\times21\times41}{6}=2870$$

(2) $6^3+7^3+8^3+\cdots\cdots+15^3$

$$=(1^3+2^3+\cdots\cdots+15^3)-(1^3+2^3+\cdots\cdots+5^3)$$

$$=\sum_{k=1}^{15}k^3-\sum_{k=1}^{5}k^3=\left(\frac{15\times16}{2}\right)^2-\left(\frac{5\times6}{2}\right)^2$$

$$=14400-225=14175$$

(3) $1\times4+2\times7+3\times10+4\times13+\cdots\cdots+n(3n+1)$

$$=\sum_{k=1}^{n}k(3k+1)=\sum_{k=1}^{n}(3k^2+k)=\sum_{k=1}^{n}3k^2+\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=3\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=3\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+2)}{2}=n(n+1)^2$$

例題 10

試求下列各級數的和：

(1) $\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{k(k+1)}=$______。（5 分）

(2) $\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{k(k+2)}=$______。（5 分）

解　(1) $\sum_{k=1}^{99}\frac{1}{k(k+1)}$

$$=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots\cdots+\frac{1}{99\times100}$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)$$

$$=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$$

(2) $\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{k(k+2)}$

$=\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{2\times 4}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{4\times 6}+\cdots\cdots+\frac{1}{18\times 19}+\frac{1}{19\times 21}+\frac{1}{20\times 22}$

$=\frac{1}{2}\times\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{18}-\frac{1}{20}\right)+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)+\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{22}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{21}-\frac{1}{22}\right)$

$=\frac{325}{462}$