第 1 章　數列與級數

1-1　數　列

重點一　數列的定義

例題 1

(1) 試寫出數列〈$3n-2$〉的前五項。（3 分）

(2) 試寫出數列$\left\langle 4\times\left(\frac{2}{3}\right)^n \right\rangle$的前五項。（3 分）

(3) 設數列〈a_n〉的一般項為 $a_n=\frac{n(n-3)}{2}$，試寫出此數列的前五項。（4 分）

解　(1) 將 $n=1$，2，3，4，5 分別代入 $a_n=3n-2$

得前五項為 1，4，7，10，13

(2) 將 $n=1$，2，3，4，5 分別代入 $a_n=4\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$

得前五項為$\frac{8}{3}$，$\frac{16}{9}$，$\frac{32}{27}$，$\frac{64}{81}$，$\frac{128}{243}$

(3) 將 $n=1$，2，3，4，5 分別代入 $a_n=\frac{n(n-3)}{2}$

得前五項為-1，-1，0，2，5

例題 2

試寫出下列數列的前五項，並求出其一般項 a_n：

(1) 等差數列首項為 3，公差為-2。（5 分）

(2) 等比數列首項為 5，公比為 3。（5 分）

解　(1) $a_1=3$

$a_2=a_1+d=3+(-2)=1$

$a_3=a_2+d=a_1+2d=3+2\times(-2)=-1$

$a_4=a_3+d=a_1+3d=3+3\times(-2)=-3$

$a_5=a_4+d=a_1+4d=3+4\times(-2)=-5$

…

$a_n=a_{n-1}+d=a_1+(n-1)d=3+(n-1)\times(-2)=5-2n$

(2) $a_1=5$

$a_2=a_1r=5\times3=15$

$a_3=a_2r=a_1r^2=5\times3^2=45$

$a_4=a_3r=a_1r^3=5\times3^3=135$

$a_5=a_4r=a_1r^4=5\times3^4=405$

…

$a_n=a_{n-1}r=a_1r^{n-1}=5\times3^{n-1}$

例題 3

(1) 設等差數列〈a_n〉的第 3 項為 27，第 7 項為－9，則此等差數列的第 15 項為______。（4 分）

(2) 設一等比數列〈a_n〉，若 $a_2+a_4=10$，$a_3+a_5=\frac{10}{3}$，則首項 $a_1=$______，公比 $r=$______。（6 分）

解　(1) $\begin{cases}27=a_1+(3-1)d\\-9=a_1+(7-1)d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1+2d=27\\a_1+6d=-9\end{cases}$

解之得 $a_1=45$，$d=-9$

故 $a_{15}=a_1+14d=45+14\times(-9)=-81$

(2) $\because a_2+a_4=10$

$\therefore a_1r+a_1r^3=10$

$\Rightarrow a_1r(1+r^2)=10$……………①

$\because a_3+a_5=\frac{10}{3}$

$\therefore a_1r^2+a_1r^4=\frac{10}{3}$

$\Rightarrow a_1r^2(1+r^2)=\frac{10}{3}$……………②

$\frac{②}{①}$得 $r=\frac{1}{3}$，代入①得 $a_1=27$，故首項 $a_1=27$，公比 $r=\frac{1}{3}$

重點二　遞迴數列

例題 4

試寫出下列遞迴數列的前六項：

(1) $a_1=4$ 且 $a_n=2a_{n-1}+3n$，其中 $n\geq 2$。（5 分）

(2) $a_1=2$，$a_2=3$ 且 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，其中 $n\geq 3$。（5 分）

解　(1)由上依序代入可以得到

$a_1=4$

$a_2=2a_1+3\times2=2\times4+6=14$

$a_3=2a_2+3\times3=2\times14+9=37$

$a_4=2a_3+3\times4=2\times37+12=86$

$a_5=2a_4+3\times5=2\times86+15=187$

$a_6=2a_5+3\times6=2\times187+18=392$

(2) 由上依序代入可以得到

$a_1=2$

$a_2=3$

$a_3=a_2+a_1=3+2=5$

$a_4=a_3+a_2=5+3=8$

$a_5=a_4+a_3=8+5=13$

$a_6=a_5+a_4=13+8=21$

例題 5

數列〈a_n〉的遞迴定義式為$\begin{cases} a_1=1 \\ a_n=a_{n-1}+2，n \text{ 是正整數且} n\geq 2 \end{cases}$，則一般項 a_n＝______。（10 分）

解　由定義式得出

$$\begin{aligned} a_1&=1 \\ a_2-a_1&=2 \\ a_3-a_2&=2 \\ &\vdots \\ +)\quad a_n-a_{n-1}&=2 \\ \hline a_n&=1+\underbrace{2+2+\cdots\cdots+2}_{n-1\text{ 次}}=1+2(n-1)=2n-1 \end{aligned}$$

即一般項 $a_n=2n-1$

〈另解〉

$\because a_1=1$，又 $d=a_n-a_{n-1}=2$

知此數列是首項為 1，公差為 2 的等差數列

故一般項 $a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1)\times 2=2n-1$

例題 6

數列〈a_n〉的遞迴定義式為$\begin{cases} a_1=3 \\ a_n=2a_{n-1}，n \text{ 是正整數且} n\geq 2 \end{cases}$，則一般項 a_n＝______。（10 分）

解　由定義式得出

$$\begin{aligned} a_1&=3 \\ a_2&=2\times a_1 \\ a_3&=2\times a_2 \\ &\cdots \\ \times)\quad a_n&=2\times a_{n-1} \\ \hline a_n&=3\times\underbrace{2\times 2\times\cdots\cdots\times 2}_{n-1\text{ 次}}=3\times 2^{n-1} \end{aligned}$$

即一般項 $a_n=3\times 2^{n-1}$

〈另解〉

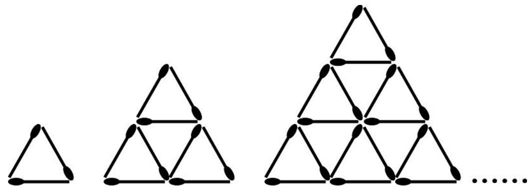
$\because a_1=3$，又 $r=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=2$

知此數列是首項為 3，公比為 2 的等比數列

故一般項 $a_n=a_1\times r^{n-1}=3\times 2^{n-1}$

例題 7

一個邊長為 n 的大正三角形內，共有 n^2 個單位小正三角形，如果每個單位正三角形的邊都是一根火柴棒，並設此邊長為 n 的大正三角形共用了 a_n 根火柴棒。



(1) 試求 a_1，a_2，a_3，a_4。（2 分）
(2) 設 $n\geq 2$，求出 a_n 與 a_{n-1} 之間的關係。（2 分）
(3) 寫出數列〈a_n〉的遞迴式。（3 分）
(4) 試求 a_n。（3 分）

解　(1) $a_1=3$
$a_2=3+2\times 3=3\times(1+2)=9$
$a_3=3+2\times 3+3\times 3=3\times(1+2+3)=18$
$a_4=3+2\times 3+3\times 3+4\times 3=3\times(1+2+3+4)=30$

(2) 由題圖及 a_1，a_2，a_3，a_4 觀察可得
$a_n=a_{n-1}+3n$，其中 $n\geq 2$

(3) 數列〈a_n〉的遞迴式為 $\begin{cases} a_1=3 \\ a_n=a_{n-1}+3n，n\geq 2 \end{cases}$

(4) 由(3)知

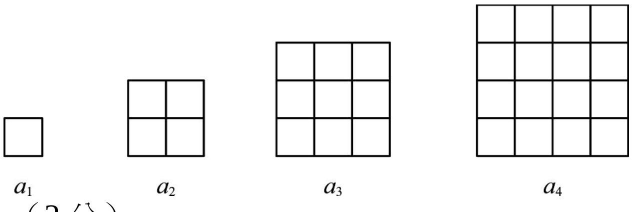
$$\begin{array}{rrl} & a_1= & 3 \\ & a_2= & a_1 \quad +3\times 2 \\ & a_3= & a_2 \quad +3\times 3 \\ & a_4= & a_3 \quad +3\times 4 \\ & & \cdots \\ +) & a_n= & a_{n-1} \quad +3\times n \\ \hline \end{array}$$

$$a_n=3\times(1+2+3+\cdots\cdots+n)=3\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{3}{2}n(n+1)$$

故 $a_n=\dfrac{3}{2}n(n+1)$

例題 8

一個邊長為 n 的大正方形中，共有 n^2 個單位正方形。如果每一個單位正方形的邊都恰有一根火柴棒，而此大正方形共用了 a_n 根火柴棒，如下圖，則：



(1) 試求 a_1，a_2，a_3，a_4。（2 分）
(2) 設 $n\geq 2$，求出 a_n 與 a_{n-1} 之間的關係。（2 分）
(3) 寫出數列〈a_n〉的遞迴式。（3 分）
(4) 試求 a_n。（3 分）

解　(1) $a_1=4$

$a_2=12=4+4\times2$

$a_3=24=12+4\times3$

$a_4=40=24+4\times4$

(2) 由題圖及 a_1，a_2，a_3，a_4 可觀察得

$a_n=a_{n-1}+4n$，其中 $n\geq2$

(3) 數列〈a_n〉的遞迴式為 $\begin{cases}a_1=4\\a_n=a_{n-1}+4n，n\geq2\end{cases}$

(4) 由(3)知

$$\begin{array}{rl} & a_1=4\\ & a_2=a_1+4\times2\\ & a_3=a_2+4\times3\\ & a_4=a_3+4\times4\\ & \quad\vdots\\ +) & a_n=a_{n-1}+4\times n\\ \hline & a_n=4\times(1+2+3+4+\cdots\cdots+n)\\ & \quad=4\times\dfrac{n(n+1)}{2}\\ & \quad=2n(n+1)\end{array}$$

故 $a_n=2n(n+1)$

重點三　數學歸納法

例題 9

數列〈a_n〉的遞迴式為 $\begin{cases}a_1=2，\\a_n=3a_{n-1}+2，n\text{ 是正整數且}n\geq2，\end{cases}$

(1) 試推測這數列的第 n 項 a_n。(5 分)

(2) 用數學歸納法加以證明。(5 分)

解　(1) 首先觀察到

$a_1=2=3^1-1$

$a_2=3a_1+2=3\times2+2=3^2-1$

$a_3=3a_2+2=3\times(3^2-1)+2=3^3-1$

$a_4=3a_3+2=3\times(3^3-1)+2=3^4-1$

因而推斷第 n 項 $a_n=3^n-1$

(2) 用數學歸納法加以證明

①當 $n=1$ 時，$a_1=3^1-1=2$，等式成立

②設 $n=k$ 時等式成立，即 $a_k=3^k-1$，

則 $n=k+1$ 時

$a_{k+1}=3a_k+2=3(3^k-1)+2=3^{k+1}-1$

$\therefore n=k+1$ 時，等式成立

故由數學歸納法知，對任意正整數 n，$a_n=3^n-1$ 恆成立

例題 10

設 n 為自然數，求證 $4^{2n+1}+3^{n+2}$ 為 13 之倍數。（10 分）

證　(1) 當 $n=1$ 時，$4^{2+1}+3^{1+2}=91=13\times7$ 為 13 之倍數

$\therefore n=1$ 時成立

(2) 設 $n=k$ 時命題成立，即 $4^{2k+1}+3^{k+2}$ 為 13 的倍數

令 $4^{2k+1}+3^{k+2}=13t$（$t\in$ ¢ ）

則 $n=k+1$ 時

$$\begin{aligned}4^{2(k+1)+1}+3^{(k+1)+2}&=16\times4^{2k+1}+3\times3^{k+2}\\&=3\times4^{2k+1}+3\times3^{k+2}+13\times4^{2k+1}\\&=3(4^{2k+1}+3^{k+2})+13\times4^{2k+1}\\&=3\times13t+13\times4^{2k+1}\\&=13(3t+4^{2k+1})\text{ 為 13 之倍數}\end{aligned}$$

$\therefore n=k+1$ 時，亦成立

故由數學歸納法得知此式恆成立