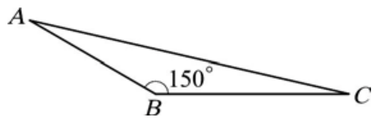
習題 1-3　正弦定理、餘弦定理

一、基本題

1. 在△ABC 中，已知 $\overline{AB}=6$， $\overline{BC}=8$，且∠B＝150°，試求△ABC 的面積。

解　如下圖，

△ABC 面積＝$\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\sin B=\frac{1}{2}$・6・8・sin 150°＝12。



2. 在△ABC 中，已知 a：b：c＝5：6：7，試求：

(1) sin A：sin B：sin C。

(2) cos A。

解　(1) 由正弦定理知

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin \mathrm{B}}=\frac{c}{\sin C}$$

故 sin A：sin B：sin C＝a：b：c＝5：6：7。

(2) 不失一般性，假設 a＝5k，b＝6k，c＝7k，k 為實數，

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{(6k)^2+(7k)^2-(5k)^2}{2\cdot 6k\cdot 7k}=\frac{5}{7}$$

3. 在△ABC 中，已知 $\overline{AB}=7$， $\overline{BC}=9$， $\overline{CA}=8$，試求：

(1) cos A。

(2) sin A。

(3) △ABC 外接圓半徑。

(4) △ABC 的面積。

解　(1) 由餘弦定理知 $\cos A=\frac{7^2+8^2-9^2}{2\cdot 7\cdot 8}=\frac{2}{7}$

(2) 由平方關係知 $\sin A=\pm\sqrt{1-\cos^2 A}=\pm\frac{3\sqrt{5}}{7}$

（負不合，因 0°＜∠A＜180°，所以 sin A 均為正）。

(3) 由正弦定理知 $\frac{a}{\sin A}=2R$

$\Rightarrow \frac{9}{\frac{3\sqrt{5}}{7}}=2R \Rightarrow R=\frac{21\sqrt{5}}{10}$ 。

(4) 〔解法一〕

$\triangle ABC$ 面積$=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\sin A=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot 8\cdot\frac{3\sqrt{5}}{7}=12\sqrt{5}$

〔解法二〕

利用海龍公式，$\triangle ABC$ 面積$=\sqrt{12\cdot 5\cdot 4\cdot 3}=12\sqrt{5}$

4. 在$\triangle ABC$ 中，已知$\overline{AC}=2$， $\overline{BC}=3$，且$\angle C=60°$，試求：

(1) $\overline{AB}$ 的長度。　　(2) 過點 C 之高。

解 (1) 由餘弦定理得

$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cdot\cos C=2^2+3^2-2\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{1}{2}=7$，

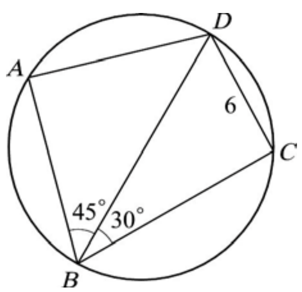
故 $\overline{AB}=\sqrt{7}$ 。

(2) 設過點 C 之高為 h，

則$\triangle ABC$ 面積$=\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cdot\sin C=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot h$

⇨ $h=\frac{2\cdot 3\cdot\sin 60^\circ}{\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{21}}{7}$

5. 如下圖所示，$ABCD$ 為圓內接四邊形，若$\angle DBC=30°$，$\angle ABD=45°$，且$\overline{CD}=6$，試求 $\overline{AD}$ 的長度。



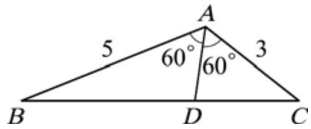
解 在$\triangle BCD$ 中，由正弦定理知 $\frac{\overline{CD}}{\sin 30^\circ}=2R$ ⇨ $2R=\frac{6}{\frac{1}{2}}=12$。

在$\triangle ABD$ 中，由正弦定理知 $\frac{\overline{AD}}{\sin 45^\circ}=2R$ ⇨ $\frac{\overline{AD}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=12$，

故$\overline{AD}=12\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}$ 。

二、進階題

6. 在△ABC 中，若 $\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=3$，且∠A＝120°，$\overline{AD}$ 平分∠A，如下圖所示，試求 $\overline{AD}$ 的長度。



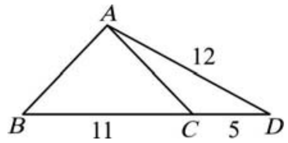
解　△ABC 面積＝△ABD 面積＋△ACD 面積。

設 $\overline{AD}=x$，利用面積公式

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\sin 120^\circ=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\cdot\sin 60^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=\frac{15}{8}。$$

7. 設△ABC 為等腰三角形，$\overline{AB}=\overline{AC}$，且 $\overline{BC}=11$。$\overline{BC}$ 的延伸線上有一點 D 滿足 $\overline{CD}=5$ 與 $\overline{AD}=12$，如下圖所示。試求 $\overline{AB}$ 的長度。

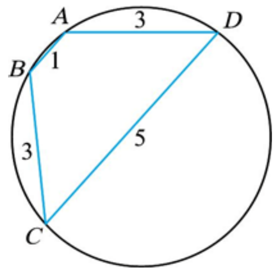


解　設 $\overline{AB}=\overline{AC}=x$。

因為∠ACB 與∠ACD 互補，故由餘弦定理可列式為 $\dfrac{x^2+11^2-x^2}{2\cdot x\cdot 11}+\dfrac{x^2+5^2-12^2}{2\cdot x\cdot 5}=0$，

解得 $x=8$。

8. 如下圖所示，A，B，C，D 為圓上四點，且 $\overline{AB}=1$，$\overline{BC}=3$，$\overline{CD}=5$，$\overline{AD}=3$，試求對角線 $\overline{AC}$ 的長。



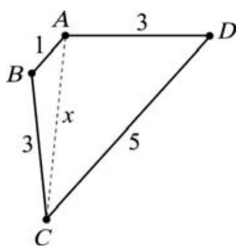
解　因為 A，B，C，D 四點共圓，

所以 ∠ABC＋∠ADC＝180°，

因此 cos∠ABC＝－cos∠ADC，

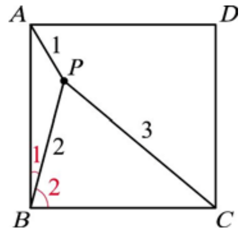
令 $\overline{AC}=x$，則 $\dfrac{1^2+3^2-x^2}{2\times1\times3}=-\dfrac{3^2+5^2-x^2}{2\times3\times5}$，

得 $x=\sqrt{14}$。



三、挑戰題

9. 如右圖所示，設 P 是正方形內部一點，且 P 到 A、B、C 的距離分別為 1、2、3，試求正方形的面積。（提示：$\angle 1+\angle 2=90°$）



解　設$\angle 2=\theta$，則$\angle 1=90°-\theta$。

設正方形邊長為 x，則 $\overline{AB}=\overline{BC}=x$，

在$\triangle ABP$ 中，由餘弦定理

$\cos(90°-\theta)=\sin\theta=\dfrac{x^2+2^2-1^2}{2\cdot x\cdot 2}=\dfrac{x^2+3}{4x}$ ………… ①

在$\triangle CBP$ 中，由餘弦定理

$\cos\theta=\dfrac{x^2+2^2-3^2}{2\cdot x\cdot 2}=\dfrac{x^2-5}{4x}$ ……………………………… ②

由平方關係知$\left(\dfrac{x^2+3}{4x}\right)^2+\left(\dfrac{x^2-5}{4x}\right)^2=1$

⇨ $x^4-10x^2+17=0$ ⇨ $x^2=5\pm2\sqrt{2}$（負不合，見附註），

故面積為 $5+2\sqrt{2}$ 。

附註：若 $x^2=5-2\sqrt{2}$ 代入②式，則 $\cos\theta=\dfrac{\left(5-2\sqrt{2}\right)-5}{4x}<0$ ，

即 $\theta>90°$，不合。