3-4　面積與二階行列式

重點一　面積公式與二階行列式

例題 1

△ABC 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=10$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=48$，則△$ABC$ 的面積為________。（10 分）

解　△ABC 的面積為 $\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2\times|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{5^2\times10^2-48^2}$

$=7$

例題 2

設 $A(0,2)$，$B(4,-2)$，$C(a,a-4)$，

(1) 若△ABC 的面積為 12，則 $a=$________。（5 分）

(2) 若 A，B，C 三點共線，則 $a=$________。（5 分）

解　(1) $\overrightarrow{AB}=(4,-4)$，$\overrightarrow{AC}=(a,a-6)$

△ABC 的面積為 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix}4 & -4\\ a & a-6\end{vmatrix}$ 的絕對值 $=12$

⇨ $|8a-24|=24$ ⇨ $|a-3|=3$ ⇨ $a-3=\pm3$　$\therefore a=6$ 或 0

(2)若 A，B，C 三點共線，△ABC 的面積為 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix}4 & -4\\ a & a-6\end{vmatrix}$ 的絕對值 $=0$

⇨ $|8a-24|=0$ ⇨ $|a-3|=0$ ⇨ $a-3=0$　$\therefore a=3$

例題 3

設△ABC 的三頂點為 $A(2,-3)$，$B(-2,-5)$，$C(5,-4)$，則：

(1) △ABC 的面積為________。（5 分）

(2) A 到 $\overline{BC}$ 的距離為________。（5 分）

解　(1) $\overrightarrow{AB}=(-4,-2)$，$\overrightarrow{AC}=(3,-1)$

△ABC 的面積為 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-4 & -2\\ 3 & -1\end{vmatrix}$ 的絕對值 $=\frac{1}{2}(4+6)=5$

(2) $\overline{BC}=\sqrt{(5+2)^2+(-4+5)^2}=\sqrt{50}$

$\because$ △ABC 的面積為 $\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times$（$A$ 到 $\overline{BC}$ 的距離）

$\therefore A$ 到 $\overline{BC}$ 的距離為 $\frac{2\triangle ABC\text{的面積}}{\overline{BC}}=\frac{10}{\sqrt{50}}=\sqrt{2}$

重點二　行列式的性質

例題 4

試求下列行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 1996 & 1997 \\ 1998 & 1999 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2001 & 4004 \\ 2003 & 4008 \end{vmatrix}=$________。（3 分）

(2) $\begin{vmatrix} 111 & -333 \\ 1234 & -3702 \end{vmatrix}=$________。（3 分）

(3) $\begin{vmatrix} \log 3 & \log 9 \\ 13 & 26 \end{vmatrix}=$________。（4 分）

解　(1) $\begin{vmatrix} 1996 & 1997 \\ 1998 & 1999 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2001 & 4004 \\ 2003 & 4008 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1996 & 1 \\ 1998 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2001 & 2 \\ 2003 & 2 \end{vmatrix}$

×（−1）　　×（−2）

$=(1996-1998)+2(2001-2003)=-2-4=-6$

(2) $\begin{vmatrix} 111 & -333 \\ 1234 & -3702 \end{vmatrix}=111\times1234\times\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=0$

(3) $\begin{vmatrix} \log 3 & \log 9 \\ 13 & 26 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \log 3 & 2\log 3 \\ 13 & 26 \end{vmatrix}=(\log 3)\times13\times\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=0$

例題 5

試求下列行列式的值：

(1) 若 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=1$，則 $\begin{vmatrix} 3a & 2a-4b \\ 3c & 2c-4d \end{vmatrix}=$________。（5 分）

(2) 設 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=2$，$\begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix}=-1$，則 $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ 4c+5e & 4d+5f \end{vmatrix}=$________。（5 分）

解　(1) $\begin{vmatrix} 3a & 2a-4b \\ 3c & 2c-4d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3a & 2a \\ 3c & 2c \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3a & -4b \\ 3c & -4d \end{vmatrix}$

$=0+3\times(-4)\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=3\times(-4)\times1=-12$

(2) $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ 4c+5e & 4d+5f \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ 4c & 4d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ 5e & 5f \end{vmatrix}=3\times4\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+3\times5\begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix}$

$=3\times4\times2+3\times5\times(-1)=9$

重點三　兩直線幾何關係的代數判定、克拉瑪公式

例題 6

試用克拉瑪公式解下列各聯立方程式：((1)、(2)小題 3 分，(3)小題 4 分)

(1) $\begin{cases}3x-2y-1=0\\x+2y-3=0\end{cases}$。　(2) $\begin{cases}6x-4y=5\\3x-2y=8\end{cases}$。　(3) $\begin{cases}5x+20y=10\\2x+8y=4\end{cases}$。

解　(1)由 $\begin{cases}3x-2y=1\\x+2y=3\end{cases}$ 得 $\Delta=\begin{vmatrix}3&-2\\1&2\end{vmatrix}=8$，$\Delta_x=\begin{vmatrix}1&-2\\3&2\end{vmatrix}=8$，$\Delta_y=\begin{vmatrix}3&1\\1&3\end{vmatrix}=8$，

所以 $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{8}{8}=1$，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{8}{8}=1$

(2) $\Delta=\begin{vmatrix}6&-4\\3&-2\end{vmatrix}=0$，$\Delta_x=\begin{vmatrix}5&-4\\8&-2\end{vmatrix}=22\neq0$　∴聯立方程式無解

(3) $\Delta=\begin{vmatrix}5&20\\2&8\end{vmatrix}=0$，$\Delta_x=\begin{vmatrix}10&20\\4&8\end{vmatrix}=0$，$\Delta_y=\begin{vmatrix}5&10\\2&4\end{vmatrix}=0$

∴聯立方程式有無限多組解

令 $y=t$，得 $x=2-4t$，t 為任意實數

故聯立方程式的解為 $\begin{cases}x=2-4t\\y=t\end{cases}$，$t$ 為任意實數

例題 7

若聯立方程式 $\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$ 的解為 $x=1$，$y=2$，試求聯立方程式 $\begin{cases}3a_1x+2b_1y=5c_1\\3a_2x+2b_2y=5c_2\end{cases}$ 的解。(10 分)

解　$x=\dfrac{\begin{vmatrix}c_1&b_1\\c_2&b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}}=1$，$y=\dfrac{\begin{vmatrix}a_1&c_1\\a_2&c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}}=2$

聯立方程式 $\begin{cases}3a_1x+2b_1y=5c_1\\3a_2x+2b_2y=5c_2\end{cases}$ 的解為

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}5c_1&2b_1\\5c_2&2b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3a_1&2b_1\\3a_2&2b_2\end{vmatrix}}=\frac{5\times2\times\begin{vmatrix}c_1&b_1\\c_2&b_2\end{vmatrix}}{3\times2\times\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}}=\frac{5}{3}\times1=\frac{5}{3}$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}3a_1&5c_1\\3a_2&5c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3a_1&2b_1\\3a_2&2b_2\end{vmatrix}}=\frac{3\times5\times\begin{vmatrix}a_1&c_1\\a_2&c_2\end{vmatrix}}{3\times2\times\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}}=\frac{5}{2}\times2=5$$

例題 8

試就 a 之值，討論兩直線 $\begin{cases} L_1: 2x+(3-a)y=a+5 \\ L_2: (3-a)x+2y=7-a \end{cases}$ 之幾何關係。（10 分）

解 $\begin{cases} L_1: 2x+(3-a)y=a+5 \\ L_2: (3-a)x+2y=7-a \end{cases}$ ⇨ $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3-a \\ 3-a & 2 \end{vmatrix}=-(a-5)(a-1)$

$\Delta_x=\begin{vmatrix} a+5 & 3-a \\ 7-a & 2 \end{vmatrix}=-(a-1)(a-11)$

$\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & a+5 \\ 3-a & 7-a \end{vmatrix}=(a-1)(a+1)$

(1)當 $a\neq 5$，$a\neq 1$，L_1 與 L_2 恰交於一點

⇨ 坐標為 $\left(\dfrac{\Delta_x}{\Delta},\dfrac{\Delta_y}{\Delta}\right)=\left(\dfrac{a-11}{a-5},\dfrac{-a-1}{a-5}\right)$

(2)當 $a=5$ ⇨ $\Delta=0$，但 $\Delta_x\neq 0$，$\Delta_y\neq 0$，此時 L_1 與 L_2 平行

(3)當 $a=1$ ⇨ $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$，此時 L_1 與 L_2 重合

例題 9

就聯立方程式 $\begin{cases} (k-6)x+(k+1)y=0 \\ (k-10)x+k(k+1)y=k-2 \end{cases}$ 之解而言，下列何者是正確的？（10 分）

(A)$k=1$ 時，無解　(B)$k=-2$ 時，無限多組解　(C)$k=5$ 時，恰有一組解

(D)$k=6$ 時，恰有一組解　(E)此聯立方程式不可能無限多組解

解 $\Delta=\begin{vmatrix} k-6 & k+1 \\ k-10 & k(k+1) \end{vmatrix}=(k+1)(k-2)(k-5)$

$\Delta_x=\begin{vmatrix} 0 & k+1 \\ k-2 & k(k+1) \end{vmatrix}=-(k+1)(k-2)$

$\Delta_y=\begin{vmatrix} k-6 & 0 \\ k-10 & k-2 \end{vmatrix}=(k-2)(k-6)$

當 $k=2$ 時，$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$，聯立方程式有無限多組解

當 $k=-1$，5 時，$\Delta=0$ 但 $\Delta_y\neq 0$，聯立方程式無解

當 $k\neq 2$，-1，5 時，聯立方程式恰有一組解

故選(D)

例題 10

已知聯立方程式 $\begin{cases}(1-a)x+3y=0\\5x+(3-a)y=0\end{cases}$，除了 $x=0$，$y=0$ 外尚有其他解，則 $a=$________。（10 分）

解　依題意知 $\Delta=0$ 此聯立方程式有無限多組解 ⇨ $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$

$\Delta=\begin{vmatrix}1-a & 3\\5 & 3-a\end{vmatrix}=0$

⇨ $(1-a)(3-a)-15=0$ ⇨ $(a+2)(a-6)=0$

$\therefore a=-2$ 或 6