1-3 正弦定理、餘弦定理

重點一　面積公式

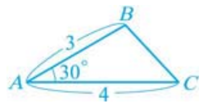
例題 1

$\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=4$，$\angle A=30^\circ$，則$\triangle ABC$ 的面積為______。(6 分)

解　$\triangle ABC$ 的面積為 $\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin30^\circ$

$=\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{1}{2}$

$=3$



例題 2

$\triangle ABC$ 中，若 $\angle A=120^\circ$，$\overline{AB}=2$，$\overline{AC}=4$，且 $\angle A$ 的平分線交 $\overline{BC}$ 於 D 點，

則 $\overline{AD}=$______。(6 分)

解　設 $\overline{AD}=x$

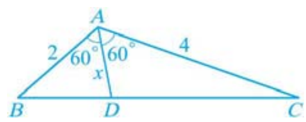
$\because\triangle ABD$ 面積$+\triangle ACD$ 面積$=\triangle ABC$ 面積

$\therefore\frac{1}{2}\times2\times x\times\sin60^\circ+\frac{1}{2}\times4\times x\times\sin60^\circ=\frac{1}{2}\times2\times4\times\sin120^\circ$

$\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}x+\sqrt{3}x=2\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $\frac{3\sqrt{3}}{2}x=2\sqrt{3}$

$\Rightarrow x=\frac{4}{3}$

故 $\overline{AD}=\frac{4}{3}$



重點二　正弦定理

例題 3

在$\triangle ABC$ 中，設 a、b、c 分別為$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊長，
$\angle A：\angle B：\angle C=1：2：3$，則 $a：b：c=$______。(6 分)

解　$\angle A=180^\circ\times\frac{1}{1+2+3}=30^\circ$，$\angle B=180^\circ\times\frac{2}{1+2+3}=60^\circ$，$\angle C=180^\circ\times\frac{3}{1+2+3}=90^\circ$

$\because\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

$\Rightarrow a：b：c=\sin30^\circ：\sin60^\circ：\sin90^\circ$

$=\frac{1}{2}：\frac{\sqrt{3}}{2}：1$

$=1：\sqrt{3}：2$

例題 4

在△ABC 中，設 a、b、c 分別為∠A、∠B、∠C 的對邊長，若 $a-2b+c=0$ 且 $3a+b-2c=0$，則 $\sin A:\sin B:\sin C=$______。(6 分)

解　$\because \begin{cases} a-2b=-c \cdots\cdots\cdots ① \\ 3a+b=2c \quad \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$

⇨ 由①、②知 $a=\dfrac{3c}{7}$，$b=\dfrac{5c}{7}$

⇨ $a:b:c=3:5:7$

⇨ $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=3:5:7$

例題 5

在△ABC 中，已知 $\overline{BC}=1$，$\sin A<1$，且 $\sin A$ 為 $2x^2-3x+1=0$ 的其中一根，則△ABC 的外接圓半徑為______。(7 分)

解　$2x^2-3x+1=0$

⇨ $(2x-1)(x-1)=0$

⇨ $x=\dfrac{1}{2}$ 或 1

$\because \sin A<1 \quad \therefore \sin A=\dfrac{1}{2}$

設△ABC 的外接圓半徑為 R

則 $2R=\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$ ⇨ $R=1$

故△ABC 的外接圓半徑為 1

重點三　餘弦定理

例題 6

在△ABC 中，設 a、b、c 分別為∠A、∠B、∠C 的對邊長，若

(1) $a:b:c=2:3:4$，則 $\cos A:\cos B:\cos C=$______。(7 分)

(2) $\sin A:\sin B:\sin C=2:3:4$，則 $\cos A=$______。(7 分)

解　(1)設 $a=2k$，$b=3k$，$c=4k$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(3k)^2+(4k)^2-(2k)^2}{2\times 3k\times 4k}=\frac{21}{24}=\frac{7}{8}$$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{(4k)^2+(2k)^2-(3k)^2}{2\times 4k\times 2k}=\frac{11}{16}$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(2k)^2+(3k)^2-(4k)^2}{2\times 2k\times 3k}=\frac{-3}{12}=-\frac{1}{4}$$

$$\therefore \cos A:\cos B:\cos C=\frac{7}{8}:\frac{11}{16}:\left(-\frac{1}{4}\right)=14:11:(-4)$$

(2)由正弦定理知

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=2:3:4$

設 $a=2k$，$b=3k$，$c=4k$

由餘弦定理知

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(3k)^2+(4k)^2-(2k)^2}{2\times 3k\times 4k}$$

$$=\frac{9k^2+16k^2-4k^2}{2\times 3k\times 4k}=\frac{21k^2}{24k^2}=\frac{7}{8}$$

例題 7

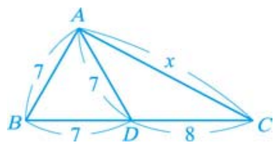
在△ABC 中，若 D 點在 $\overline{BC}$ 邊上，且 $\overline{AB}=7$，$\overline{AD}=7$，$\overline{BD}=7$，$\overline{CD}=8$，則 $\overline{AC}=$______。（7 分）

解　在△ABC 中，設 $\overline{AC}=x$，由餘弦定理知 $\cos B=\dfrac{7^2+15^2-x^2}{2\times 7\times 15}$

在△ABD 中，由餘弦定理知 $\cos B=\dfrac{7^2+7^2-7^2}{2\times 7\times 7}$

$$\cos B=\frac{7^2+15^2-x^2}{\cancel{2}\times\cancel{7}\times 15}=\frac{7^2+7^2-7^2}{\cancel{2}\times\cancel{7}\times 7}$$

$\Rightarrow \dfrac{274-x^2}{15}=7 \Rightarrow x=13$　$\therefore \overline{AC}=13$



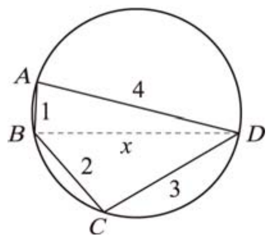
例題 8

如下圖，圓內接四邊形 $ABCD$，$\overline{AB}=1$，$\overline{BC}=2$，$\overline{CD}=3$，$\overline{AD}=4$，$\overline{BD}=x$：

(1) 在△ABD 中，試求 $\cos A=$______。（以 x 表之）（6 分）

(2) 在△BCD 中，試求 $\cos C=$______。（以 x 表之）（6 分）

(3) 試求 $\overline{BD}=$______。（6 分）



解　(1)在△ABD 中，$\cos A=\dfrac{1^2+4^2-x^2}{2\times 1\times 4}=\dfrac{17-x^2}{8}$

(2)在△BCD 中，$\cos C=\dfrac{2^2+3^2-x^2}{2\times 2\times 3}=\dfrac{13-x^2}{12}$

(3)∵四邊形 $ABCD$ 內接於一圓　∴$\angle A+\angle C=180^\circ$

$\cos A=\cos(180^\circ-\angle C)=-\cos C$

$\Rightarrow \dfrac{17-x^2}{8}=-\dfrac{13-x^2}{12}$

$\Rightarrow x^2=\dfrac{77}{5}$　$\Rightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{77}{5}}$（負不合），故 $\overline{BD}=\sqrt{\dfrac{77}{5}}=\dfrac{\sqrt{385}}{5}$

例題 9

在△ABC 中，若 $\overline{AB}=4$，$\overline{AC}=2$，$\angle A=120^\circ$，$\overline{AD}$ 為 $\overline{BC}$ 中線，試求：

(1) $\overline{BC}=$______。（6 分）

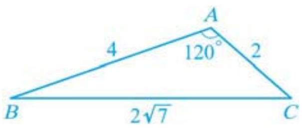
(2) $\overline{AD}=$______。（6 分）

解　(1)由餘弦定理知

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos120^\circ$$

$$=4^2+2^2-2\times4\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=28$$

$\Rightarrow$ $\overline{BC}=2\sqrt{7}$



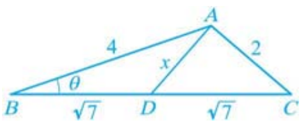
(2)設 $\overline{AD}=x$，$\angle ABC=\theta$，由餘弦定理知

$$\cos\theta=\frac{4^2+(2\sqrt{7})^2-2^2}{2\times4\times2\sqrt{7}}=\frac{4^2+(\sqrt{7})^2-x^2}{2\times4\times\sqrt{7}}$$

$\Rightarrow$ $16+28-4=2(16+7-x^2)$

$\Rightarrow$ $x=\sqrt{3}$

故 $\overline{AD}=\sqrt{3}$



重點四　海龍公式

例題 10

在△ABC 中，已知 $\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=7$，$\overline{CA}=8$，則：

(1) △ABC 面積為______。（6 分）

(2) $\sin A=$______。（6 分）

(3) △ABC 的外接圓半徑為______。（6 分）

解　(1)$\because s=\frac{1}{2}(5+7+8)=10$

$\therefore$△ABC 面積為 $\sqrt{10(10-5)(10-7)(10-8)}=10\sqrt{3}$

(2)$\because$△ABC 面積$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A=\frac{1}{2}\times5\times8\times\sin A=10\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3)$2R=\frac{\overline{BC}}{\sin A}=\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{14}{\sqrt{3}}$ $\Rightarrow$ $R=\frac{7}{\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$