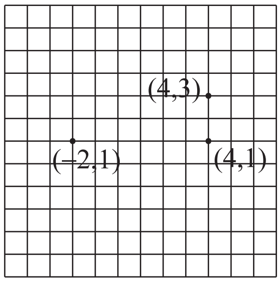
第 4 章　二次曲線

4-3　雙曲線

1.　在坐標平面上，以 $(-2,1)$，$(4,1)$ 為焦點，通過點 $(4,3)$ 畫一個雙曲線 Γ，問雙曲線也會通過下列哪些點?

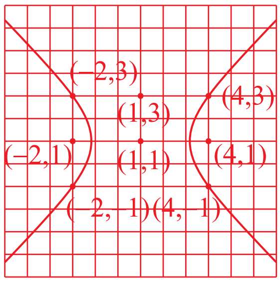


(1) $(1,1)$　　(2) $(4,-1)$　　(3) $(-2,3)$

(4) $(-2,-1)$　　(5) $(1,3)$ ．

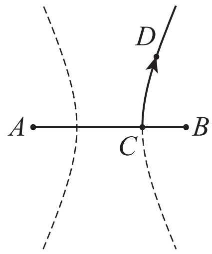
解　由雙曲線的焦點為 $(-2,1)$，$(4,1)$，且通過點 $(4,3)$，可以畫出雙曲線大致的圖形，如右圖所示．

由雙曲線的對稱關係可知：$(4,-1)$，$(-2,3)$ 與 $(-2,-1)$ 均在雙曲線上，而中心 $(1,1)$，點 $(1,3)$ 均不在雙曲線上，故正確的選項為 (2)(3)(4)．



2.　一船隻在海面上沿著一支雙曲線的航線航行，此雙曲線以兩個燈塔 A，B 為其焦點，如右圖所示．

已知此船隻在海面上 C 點時，船隻和 A 燈塔的距離為 50 公里，和 B 燈塔的距離為 20 公里，而在海面上 D 點時，此船隻和 A 燈塔的距離與和 B 燈塔之距離的和是 100 公里，求 D 點和 A 燈塔的距離是多少公里．



解　因為船隻在雙曲線上，所以雙曲線的貫軸長為 $\overline{AC}-\overline{BC}=50-20=30$，且 $\overline{AD}-\overline{BD}=\overline{AC}-\overline{BC}=30$．

又由題意可知 $\overline{AD}+\overline{BD}=100$，因此由兩式解得 $\overline{AD}=65$．

故 D 點和 A 燈塔的距離是 65 公里．

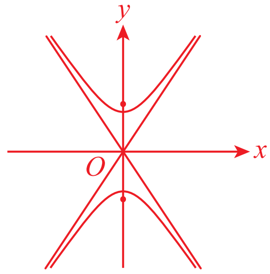
3. 求下列各雙曲線的中心、焦點與漸近線方程式：

(1) $\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{4}=1$.　　(2) $9x^2-y^2-36x-4y-4=0$.

解 (1)雙曲線 $\dfrac{y^2}{3^2}-\dfrac{x^2}{2^2}=1$ 的中心為 $(0,0)$，貫軸長之半 $a=3$，共軛軸長之半 $b=2$，且兩焦點距離之半 $c=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$.

因為雙曲線為上下開口，所以焦點為 $(0,\sqrt{13})$ 與 $(0,-\sqrt{13})$，

又兩漸近線的方程式為 $y=\pm\dfrac{3}{2}x$，即為 $3x+2y=0$ 與 $3x-2y=0$.



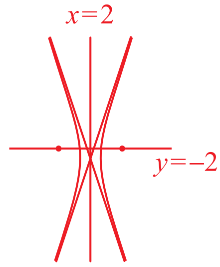
(2)將 $9x^2-y^2-36x-4y-4=0$ 配方得 $9(x-2)^2-(y+2)^2=36$，

即 $\dfrac{(x-2)^2}{4}-\dfrac{(y+2)^2}{36}=1$.

由方程式可得雙曲線的中心為 $(2,-2)$，貫軸長之半 $a=2$，共軛軸長之半 $b=6$，且兩焦點距離之半 $c=\sqrt{4+36}=2\sqrt{10}$.

因為雙曲線為左右開口，所以焦點為 $(2+2\sqrt{10},-2)$ 與 $(2-2\sqrt{10},-2)$，

又兩漸近線的方程式為 $y=\pm\dfrac{6}{2}(x-2)-2$，即為 $3x-y=8$ 與 $3x+y=4$.



4. 求滿足下列各條件的雙曲線方程式：

(1)頂點 $(3,0)$，$(-3,0)$，有一焦點 $(5,0)$．

(2)漸近線方程式為 $x-2y=0$，$x+2y=0$，且通過點 $(4,1)$．

解 (1)由頂點 $(3,0)$，$(-3,0)$ 可知：

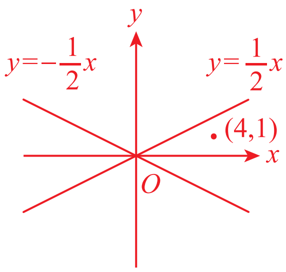
雙曲線的中心為 $(0,0)$，$a=3$，雙曲線為左右開口．

又由焦點 $(5,0)$，可得 $c=5$，並推得 $b=\sqrt{5^2-3^2}=4$．

因為雙曲線為左右開口，所以由雙曲線的標準式 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，

可知其方程式為 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$．

(2)先畫出漸近線 $x-2y=0$，$x+2y=0$ 與點 $(4,1)$，如下圖所示：



因為漸近線方程式為 $y=\frac{1}{2}x$ 與 $y=-\frac{1}{2}x$，中心為 $(0,0)$，所以由圖可知，其圖形為左右開口，並可設其標準式為 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$．

因為漸近線的方程式 $y=\frac{1}{2}x=\frac{b}{a}x$，所以可設 a，b 的值分別為 $2k$ 與 k，其中 k 是一個正數，即其方程式為 $\frac{x^2}{4k^2}-\frac{y^2}{k^2}=1$，

將 $(4,1)$ 代入方程式解得 $k^2=3$，故其方程式為 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$．

5. 求滿足下列各條件的雙曲線方程式:

(1)兩焦點為 $F_1(4,1)$，$F_2(-8,1)$，貫軸長為 6．

(2)兩焦點為 $F_1(-2,6)$，$F_2(-2,-4)$，一漸近線的斜率為 $\dfrac{3}{4}$．

解 (1)由兩焦點為 $F_1(4,1)$，$F_2(-8,1)$，可得雙曲線為左右開口，中心為 $(-2,1)$，$c=6$．

再由貫軸長為 6，可得 $a=3$，並得 $b^2=c^2-a^2=6^2-3^2=27$．

由左右開口之雙曲線的標準式 $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$，

可得雙曲線的方程式為 $\dfrac{(x+2)^2}{9}-\dfrac{(y-1)^2}{27}=1$．

(2)由兩焦點為 $F_1(-2,6)$，$F_2(-2,-4)$，可得雙曲線為上下開口，中心為 $(-2,1)$，$c=5$．

再由一漸近線的斜率為 $\dfrac{3}{4}$，可得 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{4}$，即 $a=\dfrac{3}{4}b$，且 $a^2+b^2=c^2$，即 $a^2+b^2=25$．

將 $a=\dfrac{3}{4}b$ 代入 $a^2+b^2=25$，解得 $a=3$，$b=4$．

由上下開口之雙曲線的標準式 $\dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$，

可得雙曲線的方程式為 $\dfrac{(y-1)^2}{9}-\dfrac{(x+2)^2}{16}=1$．

6. 已知雙曲線 Γ 的兩焦點與橢圓 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 的兩焦點相同，且其貫軸長為 6，求 Γ 的方程式．

解 由橢圓方程式 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 可知：中心為 $(0,0)$，$c=\sqrt{25-5}=\sqrt{20}$．

因為雙曲線的兩焦點與橢圓 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 的兩焦點相同，所以可知雙曲線的中心為 $(0,0)$，

$c=\sqrt{20}$，又因為貫軸長為 6，所以 $a=3$，並可推得 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{11}$．

由雙曲線的標準式 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，可得 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{11}=1$．

7. 當一個雙曲線的貫軸與共軛軸等長時，我們稱此雙曲線為等軸雙曲線．已知一等軸雙曲線的兩頂點分別為 $(2,1)$，$(2,5)$，求此雙曲線的方程式．

解 由雙曲線的兩頂點分別為 $(2,1)$ 與 $(2,5)$，可知其中心為 $(2,3)$，$a=2$，且雙曲線為上下開口．

因為等軸雙曲線的兩軸等長，即 $b=a=2$，所以雙曲線的方程式為 $\dfrac{(y-3)^2}{4}-\dfrac{(x-2)^2}{4}=1$．

8. 設方程式$\dfrac{x^2}{2-k}+\dfrac{y^2}{k-3}=1$的圖形是一個貫軸在 y 軸上的雙曲線，求實數 k 的範圍．

解 因為方程式$\dfrac{x^2}{2-k}+\dfrac{y^2}{k-3}=1$的圖形為一個貫軸在 y 軸上的雙曲線，所以 $2-k<0$， $k-3>0$，即 $2<k$ 且 $k>3$， 故實數 k 的範圍為 $k>3$ ．

9. 已知 P 為雙曲線$16y^2-9x^2=144$上一點，且 P 點到雙曲線兩焦點 F_1，F_2的距離比為$1:3$， 求$\triangle PF_1F_2$的周長． [92 學測]

解 將方程式$16y^2-9x^2=144$改寫成$\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{16}=1$， 可得 $a=3$， $b=4$， 即雙曲線的貫軸長 $2a=6$，並由雙曲線的定義得$\left|\overline{PF_2}-\overline{PF_1}\right|=6$， 又 $\overline{F_1F_2}$ 的長為 $2c=2\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{9+16}=10$ ．

因為 $\overline{PF_1}:\overline{PF_2}=1:3$， 所以 $\overline{PF_2}-\overline{PF_1}=6$， 並解得 $\overline{PF_1}=3$， $\overline{PF_2}=9$， 故 $\triangle PF_1F_2$ 的周長為 $3+9+10=22$ ．

10. 求以橢圓 $\Gamma:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$的焦點為頂點，且以 Γ 之長軸頂點為焦點的雙曲線方程式．

解 因為 $\Gamma:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$ 的中心為 $(0,0)$， $a=5$， $b=4$， 並由 $a^2=b^2+c^2$ 得 $c=3$， 所以 Γ 的焦點為 $(0,3)$， $(0,-3)$， 長軸兩頂點為 $(0,5)$， $(0,-5)$ ．

因此雙曲線的焦點為 $(0,5)$，$(0,-5)$，兩頂點為 $(0,3)$，$(0,-3)$，開口上下，即 $a'=3$， $c'=5$，並由 $c'^2=a'^2+b'^2$ 解得 $b'=4$， 故雙曲線的方程式為 $\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{16}=1$ ．

11. 已知到 $(1,0)$ 的距離等於到直線 $x=4$ 之距離的 2 倍之所有點所形成的圖形是一個雙曲線，求此雙曲線之中心的坐標．

解 設動點 P 的坐標為 (x,y)．由題意可知：$\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}=2|x-4|$，

將上式兩邊平方，得 $x^2-2x+1+y^2=4x^2-32x+64$，

整理得 $\dfrac{(x-5)^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$，故此雙曲線的中心為 $(5,0)$．

12. 關於雙曲線 $(2x-y-5)(2x+y-7)=16$，選出正確的選項：

(1)中心為 $(3,1)$　(2)貫軸所在的直線為 $x=3$　(3)共軛軸所在的直線為 $y=1$　(4)直線 $2x-y=5$ 為雙曲線的一條漸近線　(5)雙曲線上任一點到兩漸近線的距離乘積為 $\dfrac{4}{5}$．

解 將 $(2x-y-5)(2x+y-7)=16$ 整理得 $\dfrac{(x-3)^2}{4}-\dfrac{(y-1)^2}{16}=1$，

(1)可得中心為 $(3,1)$，$a=2$，$b=4$．

(2)貫軸所在的直線為 $y=1$．

(3)共軛軸所在的直線為 $x=3$．

(4)兩漸近線分別為 $y-1=\dfrac{4}{2}(x-3)$ 與 $y-1=-\dfrac{4}{2}(x-3)$，整理得 $2x-y=5$ 與 $2x+y=7$．

(5)雙曲線上任一點 (x_0,y_0) 到兩漸近線的距離乘積為 $\dfrac{|2x_0-y_0-5||2x_0+y_0-7|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{16}{5}$．

由上面的討論可知：正確的選項為(1)(4)．