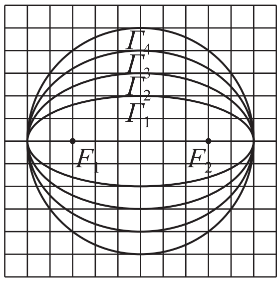
第 4 章　二次曲線

4-2　橢圓



1. 右圖中哪一個橢圓是以 F_1，F_2 為焦點的橢圓?

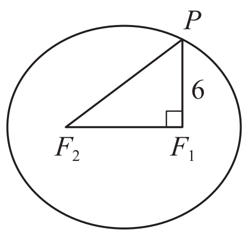
   (1) Γ_1　(2) Γ_2　(3) Γ_3　(4) Γ_4 .

解 由圖可知：橢圓長軸之半為 5 個單位長，兩焦點距離之半為 3 個單位長，因此短軸長之半為 $\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$ 個單位長，故由圖可知正確的選項為(3) .

2. 設 $F_1(4,2)$，$F_2(4,-4)$，且圖形 Γ 上的動點 P 滿足 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=k$. 下列哪些選項中的 k，可使得 Γ 是一個橢圓?

   (1) 4　(2) 5　(3) 6　(4) 7　(5) 8.

解 因為 $\overline{F_1F_2}=6$，所以由橢圓的定義可知：當 Γ 的圖形是一個橢圓時，長軸長 k 需大於 $\overline{F_1F_2}$，因此正確的選項為(4)(5) .



3. 右圖是一個以 F_1，F_2 為其焦點，長軸長為 16 的橢圓 . 若 P 為橢圓上的一點，$\triangle PF_1F_2$ 是一個直角三角形，且 $\overline{PF_1}=6$. 則此橢圓的短軸長為何?

解 由橢圓的定義可知：$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}$ 為長軸長 $2a=16$，因此 $a=8$，$\overline{PF_2}=10$.

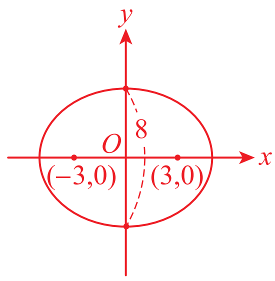
因為 $\triangle PF_1F_2$ 為直角三角形，所以 $\overline{F_1F_2}=2c=\sqrt{10^2-6^2}=8$，即 $c=4$，

並得 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$,故橢圓的短軸長 $2b=2\cdot4\sqrt{3}=8\sqrt{3}$.

4. 求滿足下列各條件的橢圓方程式：

(1)焦點 $(3,0)$，$(-3,0)$，短軸長為 8．

(2)中心在原點，一頂點 $(0,-5)$，一焦點 $(4,0)$．

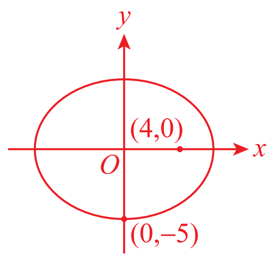


解 (1)由焦點 $(3,0)$，$(-3,0)$ 可知：

長軸在 x 軸上，$c=3$．

因為短軸的長為 8，所以 $b=4$，並可得 $a=\sqrt{b^2+c^2}=5$．

故由橢圓的標準式可知其方程式為 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$．



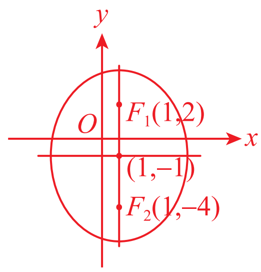
(2)由中心在原點，一頂點 $(0,-5)$，一焦點 $(4,0)$，

可知長軸在 x 軸上，$b=5$，$c=4$，並可得 $a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{41}$．

故由橢圓的標準式可知其方程式為 $\dfrac{x^2}{41}+\dfrac{y^2}{25}=1$．

5. 求下列各橢圓的中心、焦點與正焦弦長：

(1) $\dfrac{(x-1)^2}{16}+\dfrac{(y+1)^2}{25}=1$．　　　(2) $4x^2+y^2+2x=0$．



解 (1)由橢圓方程式 $\dfrac{(x-1)^2}{4^2}+\dfrac{(y+1)^2}{5^2}=1$ 可知：

中心為 $(1,-1)$，長軸長之半為 $a=5$，短軸長之半為 $b=4$，

且兩焦點距離之半為 $c=\sqrt{5^2-4^2}=3$，其圖形如右圖所示．

由圖可知橢圓的中心為 $(1,-1)$，兩焦點分別為 $(1,2)$，$(1,-4)$，

正焦弦長為 $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{32}{5}$．

(2)將 $4x^2+y^2+2x=0$ 配方為 $4\left(x^2+2\cdot\dfrac{1}{4}x+\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\right)+y^2=\dfrac{1}{4}$，即 $4\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$，將上式兩邊同除以 $\dfrac{1}{4}$，得標準式 $\dfrac{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1$．

由標準式可知中心為 $\left(-\dfrac{1}{4},0\right)$，長軸長之半為 $a=\dfrac{1}{2}$，短軸長之半為 $b=\dfrac{1}{4}$，且兩焦點距離之半為 $c=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$．

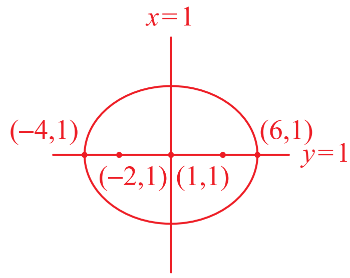
故橢圓的中心為 $\left(-\dfrac{1}{4},0\right)$，兩焦點分別為 $\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$，$\left(-\dfrac{1}{4},-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$，正焦弦長為 $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{1}{4}$．

6. 求滿足下列各條件的橢圓方程式：

(1)長軸的兩端點為 $(6,1)$，$(-4,1)$，一焦點為 $(-2,1)$．

(2)長軸長為10，且位在直線 $x=5$ 上，短軸長是長軸長的 $\dfrac{3}{5}$，且位在直線 $y=1$ 上．

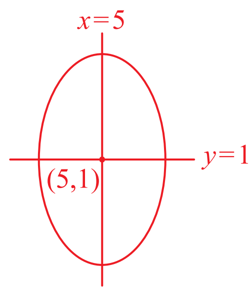
解 (1)因為長軸的兩端點為 $(6,1)$，$(-4,1)$，所以其中心為長軸的中點 $(1,1)$，$a=6-1=5$．又因為一焦點為 $(-2,1)$，所以 $c=1-(-2)=3$，並求得 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，其圖形如右圖所示．



由圖可得橢圓的方程式為

$$\frac{(x-1)^2}{5^2}+\frac{(y-1)^2}{4^2}=1.$$

(2)由題意可知：橢圓的中心為 $(5,1)$，$a=5$，$b=\dfrac{3}{5}a=3$，其圖形如右圖所示．



由圖可得橢圓的方程式為

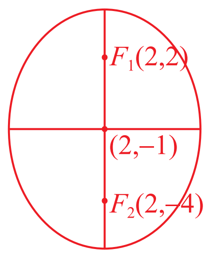
$$\frac{(x-5)^2}{3^2}+\frac{(y-1)^2}{5^2}=1.$$

7. 已知 $\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y+4)^2}=10$ 的圖形是一個橢圓，關於此橢圓選出正確的選項：

(1) $(2,2)$ 是橢圓的一個焦點　　(2) $(2,1)$ 是橢圓的中心

(3)長軸長為 10　　(4)短軸長為 8．

解 由方程式 $\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y+4)^2}=10$



可知：點 (x,y) 到點 $(2,2)$ 的距離 $\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}$ 與點 (x,y) 到點 $(2,-4)$ 的距離 $\sqrt{(x-2)^2+(y+4)^2}$ 之和為 10，因此橢圓的兩焦點為 $(2,2)$，$(2,-4)$，中心為 $(2,-1)$，長軸長 $2a=10$，即 $a=5$，又 $2c=2-(-4)=6$，即 $c=3$，並得短軸長之半 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$，即短軸長為 8．

故由上面的討論可知：正確的選項為(1)(3)(4)．

8. 關於方程式 $\dfrac{x^2}{8-k}+\dfrac{y^2}{k-4}=1$，選出正確的選項：

(1) $k=6$ 時，其圖形是一個圓　　(2) $k=7$ 時，其圖形是一個橢圓

(3)當其圖形為焦點在 x 軸上的橢圓時，k 的範圍為 $4<k<6$

(4)當其圖形為焦點在 y 軸上的橢圓時，k 的範圍為 $6<k<8$ ．

解 關於方程式 $\dfrac{x^2}{8-k}+\dfrac{y^2}{k-4}=1$，

(1)當 $k=6$ 時，方程式為 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}=1$，即 $x^2+y^2=2$，其圖形是一個圓．

(2)當 $k=7$ 時，方程式為 $\dfrac{x^2}{1}+\dfrac{y^2}{3}=1$，其圖形是一個橢圓．

(3)當 $\dfrac{x^2}{8-k}+\dfrac{y^2}{k-4}=1$ 的圖形為焦點在 x 軸上的橢圓時，可得 $a^2=8-k$，$b^2=k-4$ ．

因為 $a^2>b^2>0$，所以 $8-k>k-4>0$，解得 $4<k<6$ ．

(4)當 $\dfrac{x^2}{8-k}+\dfrac{y^2}{k-4}=1$ 的圖形為焦點在 y 軸上的橢圓時，可得 $a^2=k-4$，$b^2=8-k$.

因為 $a^2>b^2>0$，所以 $k-4>8-k>0$，解得 $6<k<8$.

故由上面的討論可知：正確的選項為 (1)(2)(3)(4)．

9. 求中心為原點，軸為坐標軸，且通過 $(2,4)$，$\left(3\sqrt{2},3\right)$ 兩點的橢圓方程式．

解 因為橢圓的中心為原點，軸為坐標軸，所以可設橢圓的方程式為 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ．

將點 $(2,4)$，$\left(3\sqrt{2},3\right)$ 代入 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，得 $\begin{cases}\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{16}{b^2}=1\\[2mm]\dfrac{18}{a^2}+\dfrac{9}{b^2}=1\end{cases}$，

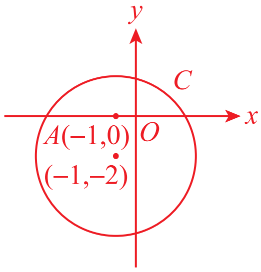
由二式解得 $a^2=36$，$b^2=18$，故橢圓的方程式為 $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{18}=1$ ．

10. 設點 $A(-1,0)$，圓 $C:(x+1)^2+(y+2)^2=16$．

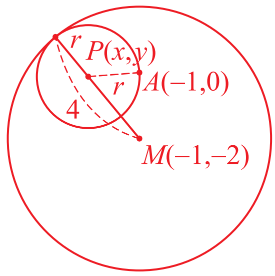
(1)在坐標平面上畫出點 A 與圓 C．

(2)求所有通過點 A 且與圓 C 相切之圓的圓心，所形成之圖形的方程式．

解 (1)作圖如下，並得點 A 在圓 C 內部．



(2)設與圓 C 相切之圓的圓心為 $P(x,y)$，半徑為 r，圓 C 的圓心為 M．



由右圖可知：$\overline{AP}$ 等於 r，且 $\overline{AP}+\overline{PM}=r+\overline{PM}=4$．

因此，所有的 P 點形成以 A，M 為焦點，長軸長為 4，兩焦點間距離為 2 的橢圓．

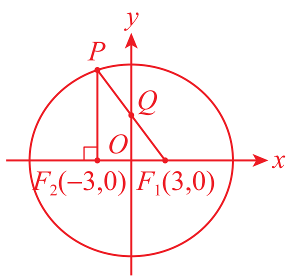
因為 A，M 為焦點，所以橢圓的中心為 $(-1,-1)$，且 $c=1$，

又因為長軸長為 4，所以 $2a=4$，解得 $a=2$，並得 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$．

故所有圓心所形成的橢圓方程式為 $\dfrac{(x+1)^2}{3}+\dfrac{(y+1)^2}{4}=1$．

11. 設橢圓 $\Gamma:\dfrac{x^2}{81}+\dfrac{y^2}{72}=1$ 的兩焦點為 F_1 與 F_2．若點 P 為 Γ 上一點，且滿足 $\overline{PF_1}$ 的中點在 y 軸上，求 $\overline{PF_1}$ 的長．

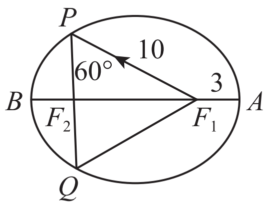
解 由方程式 $\dfrac{x^2}{81}+\dfrac{y^2}{72}=1$ 可知：$a=9$，$b^2=72$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{9}=3$．



因為 $\overline{PF_1}$ 的中點 Q 在 y 軸上，且原點 O 為 $\overline{F_1F_2}$ 的中點，所以 $\overline{PF_2}\perp\overline{F_1F_2}$，即 $\overline{PF_2}$ 的長為正焦弦長的一半．

因為正焦弦的長為 $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{144}{9}=16$，即 $\overline{PF_2}$ 長為 8，又 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}$ 等於長軸長 18，所以 $\overline{PF_1}$ 的長度為 10．

12. 右圖是一個橢圓，焦點 F_1 與頂點 A 的距離為 3 單位長．現在有一道雷射光由 F_1 出發，行經 10 單位長之後碰到橢圓上的 P 點反射，再經過 F_2 碰到橢圓上的 Q 點反射回 F_1 點．若 $\angle F_1PQ=60^\circ$，則 $\triangle F_1PQ$ 的周長為何？



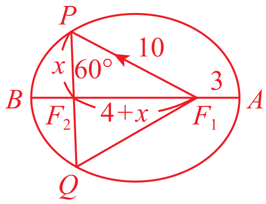
解　假設 $\overline{PF_2}=x$，則 $\overline{AB}=\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=10+x$．

因為 $\overline{AF_1}=\overline{BF_2}=3$，所以 $\overline{F_1F_2}=4+x$．

觀察 $\triangle PF_1F_2$，由餘弦定理可知：$(4+x)^2=x^2+10^2-2\cdot x\cdot 10\cdot\cos 60^\circ$，

整理得 $18x=84$，

解得 $x=\dfrac{14}{3}$，即長軸長為 $\dfrac{44}{3}$．



因為 $\triangle F_1PQ$ 的周長為長軸長的 2 倍，所以 $\triangle F_1PQ$ 的周長為 $\dfrac{88}{3}$（單位長）．