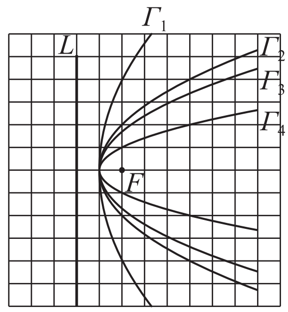
第 4 章　二次曲線

4-1　拋物線

1. 右圖中哪一個圖形是以 F 為焦點，L 為準線的拋物線?



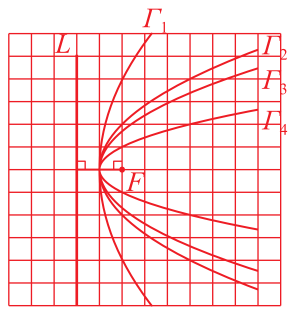
(1) Γ_1

(2) Γ_2

(3) Γ_3

(4) Γ_4 .

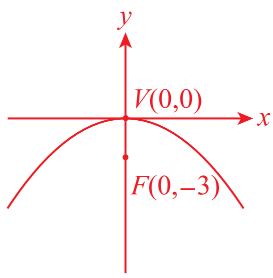
解 因為焦點與準線的距離為正焦弦長的一半，
所以由圖可知 Γ_2 是以 F 為焦點，L 為準線的拋物線．
因此正確的選項為(2)．



2. 求下列各拋物線的方程式：

(1)焦點 $F(0,-3)$，頂點 $V(0,0)$．　(2)頂點 $V(1,1)$，準線 $L: x=4$．

解 (1)因為焦點 F 在頂點 V 的下方，所以拋物線開口向下，
且 $c=-3$，如右圖所示．
由拋物線的標準式 $x^2=4cy$ 可得其方程式為 $x^2=-12y$．

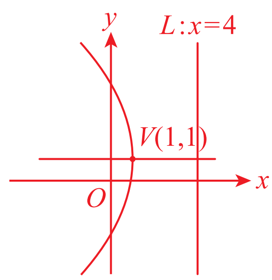


(2)因為頂點 V 在準線 L 的左方,所以拋物線開口向左,$c=-3$,如右圖所示.

因為拋物線開口向左,

所以由標準式 $(y-k)^2=4c(x-h)$ 可得其方程式為

$(y-1)^2=-12(x-1)$.



3. 求下列各拋物線的方程式：

(1)頂點$(0,0)$，準線平行 x 軸，且通過點$(2,6)$．

(2)頂點$(2,1)$，準線垂直 x 軸，正焦弦長為8．（有兩個解）

解 (1)由頂點$(0,0)$，準線平行 x 軸，可設拋物線的方程式為 $y=ax^2$．

因為拋物線通過點$(2,6)$，將其代入 $y=ax^2$，解得 $a=\dfrac{3}{2}$，

所以拋物線的方程式為 $y=\dfrac{3}{2}x^2$．

(2)由正焦弦長為 8 可得 $4|c|=8$，解得 $c=\pm2$．又由頂點$(2,1)$，準線垂直 x 軸，可知拋物線的開口向左或向右．

當拋物線開口向左時，$c=-2$，方程式為 $(y-1)^2=-8(x-2)$；

當拋物線開口向右時，$c=2$，方程式為 $(y-1)^2=8(x-2)$．

4. 下列哪個拋物線的焦距最大？其中焦距表示焦點和頂點的距離．

(1) $y=x^2$　(2) $y=4x^2$　(3) $y=16x^2$　(4) $4x=y^2$　(5) $16x=y^2$．

解 將各選項的方程式改成標準式：

(1) $4\left(\dfrac{1}{4}\right)y=x^2$．　(2) $4\left(\dfrac{1}{16}\right)y=x^2$．　(3) $4\left(\dfrac{1}{64}\right)y=x^2$．　(4) $4(1)x=y^2$．

(5) $4(4x)=y^2$．

可知各拋物線的焦距分別為(1) $\dfrac{1}{4}$　(2) $\dfrac{1}{16}$　(3) $\dfrac{1}{64}$　(4) 1　(5) 4，

故正確的選項為(5)．

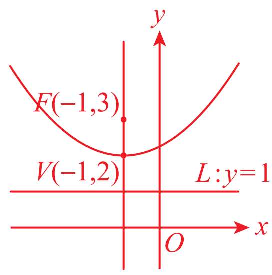
5. (1)求拋物線 $(x+1)^2=4(y-2)$ 的準線與焦點．

(2)求拋物線 $x=4y^2+8y+1$ 的頂點與對稱軸．

解 (1)將方程式 $(x+1)^2=4(y-2)$ 依 $(x-h)^2=4c(y-k)$

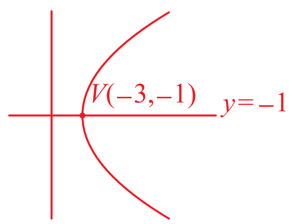
改寫成 $(x-(-1))^2=4\cdot1\cdot(y-2)$，得拋物線的頂點為 $V(-1,2)$，$c=1$，且其圖形開口向上，如右圖所示．

故拋物線的焦點為 $F(-1,3)$，準線為 $L:y=1$．



(2)將 $x=4y^2+8y+1$ 配方可得 $x+3=4(y+1)^2$，

改寫成 $(y+1)^2=4\cdot\dfrac{1}{16}(x+3)$，得拋物線的頂點為 $V(-3,-1)$，對稱軸為 $y=-1$，如右圖所示．



6. 求對稱軸為 $x=1$，且通過點 $(2,2)$ 與 $(-1,5)$ 的拋物線方程式．

解 因為拋物線的對稱軸為 $x=1$，所以可設其方程式為 $(x-1)^2=4c(y-k)$．

將點 $(2,2)$ 與 $(-1,5)$ 代入 $(x-1)^2=4c(y-k)$，得 $\begin{cases}1=4c(2-k)\\4=4c(5-k)\end{cases}$，再將兩式相除，得 $\dfrac{1}{4}=\dfrac{2-k}{5-k}$，

解得 $k=1$，並得 $c=\dfrac{1}{4}$，因此拋物線的方程式為 $(x-1)^2=y-1$．

7. 已知拋物線 Γ 通過點 $(7,8)$，且與 $y^2=4x$ 有相同的焦點與對稱軸，求 Γ 的方程式．

解 由 $y^2=4x$ 可知：拋物線的頂點為 $(0,0)$，$c=1$，開口向右，因此其焦點為 $(1,0)$，對稱軸為 $y=0$．

設 Γ 的頂點為 $(h,0)$，則 $c=1-h$，且其方程式可設為 $y^2=4(1-h)(x-h)$．

因為拋物線 Γ 通過點 $(7,8)$，所以將其代入方程式，得 $8^2=4(1-h)(7-h)$，

整理得 $h^2-8h-9=0$，並解得 $h=9$ 或 $h=-1$，

故 Γ 的方程式為 $y^2=-32(x-9)$ 或 $y^2=8(x+1)$．

8. 求對稱軸垂直 y 軸，且通過 $(-3,1)$，$(2,0)$，$(0,-2)$ 三點的拋物線方程式．

解 因為拋物線的對稱軸垂直 y 軸，所以可設其方程式為 $x=ay^2+by+c$．

將 $(-3,1)$，$(2,0)$，$(0,-2)$ 三點代入 $x=ay^2+by+c$，得 $\begin{cases}-3=a+b+c\\2=c\\0=4a-2b+c\end{cases}$，

解得 $a=-2$，$b=-3$，$c=2$，即拋物線的方程式為 $x=-2y^2-3y+2$．

9. 已知 $|x-3|=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}$ 的圖形是一個拋物線，關於此拋物線選出正確的選項：

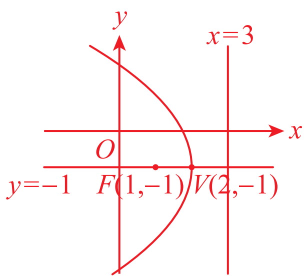
(1)焦點為 $(1,-1)$　(2)準線為 $x=3$　(3)頂點為 $(3,-1)$

(4)對稱軸為 $y=-1$　(5)正焦弦長為 1．

解 **由方程式** $|x-3|=\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}$ **可知**:

點 (x,y) 到直線 $x=3$ 的距離 $|x-3|$ 與點 (x,y) 到點 $(1,-1)$ 的距離 $\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}$ 相等，

因此由拋物線的定義可知：此拋物線的焦點為 $(1,-1)$，準線為 $x=3$，如右圖所示．

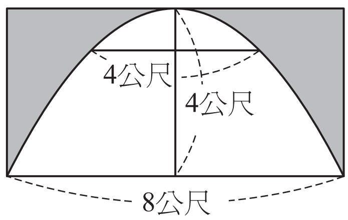


由圖可知：拋物線的頂點為 $(2,-1)$，對稱軸為 $y=-1$，$c=-1$，正焦弦長 $|4c|=4$．

故由上面的討論可知：正確的選項為(1)(2)(4)．

10. 一拋物線形拱門如右圖所示．

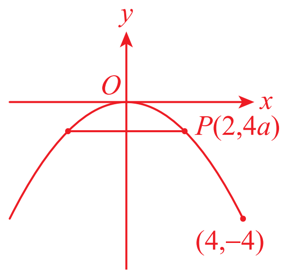
已知此拋物線以通過最高點的鉛垂線為對稱軸，拱門底部寬為 8 公尺，最高點高 4 公尺，求拱門寬度為 4 公尺處的高度．



解 選定拋物線的頂點為坐標平面的原點，軸為 y 軸，且讓拋物線的開口向下，由此可設拋物線的方程式為 $y=ax^2$，$a<0$．

因為拱門底部寬為 8 公尺，最高點高 4 公尺，所以拋物線通過點 $(4,-4)$，代入 $y=ax^2$，**解得** $a=-\frac{1}{4}$.

設 $P(2,4a)$ 為拱門寬度為 4 公尺處的右邊端點，將 $a=-\frac{1}{4}$ 代入，得 P 點坐標為 $(2,-1)$．

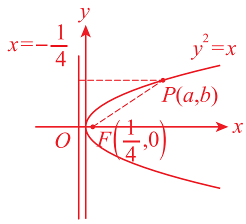


故由圖可知，P 點的高度為 $(-1)-(-4)=3$（公尺）.

11. 已知 $P(a,b)$ 為拋物線 $\Gamma: y^2=x$ 上一點，且點 P 到焦點的距離為 3，求 a 的值．

解 由 $y^2=4\cdot\frac{1}{4}x$ 可知拋物線開口向右，

其焦點為 $\left(\frac{1}{4},0\right)$，準線為 $x=-\frac{1}{4}$，如右圖所示．

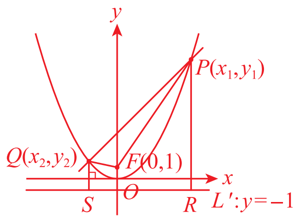


因為拋物線上的點到焦點的距離與到準線的距離相等，

所以點 P 到準線的距離為 3，即 $a-\left(-\frac{1}{4}\right)=3$，解得 $a=2\frac{3}{4}$．

12. 已知在坐標平面上，直線 $L: y=x+4$ 與拋物線 $\Gamma: x^2=4y$ 相交於 P、Q 兩點，且 F 為 Γ 的焦點，求 $\overline{PF}+\overline{QF}$ 的值．

解 先在坐標平面上畫出 $x^2=4y$ 的圖形，如圖所示．



由拋物線的定義可知，$\overline{PF}=\overline{PR}$，$\overline{QF}=\overline{QS}$，

故 $\overline{PF}+\overline{QF}=\overline{PR}+\overline{QS}$，

又因為準線為 $y=-1$，所以可知

$\overline{PR}+\overline{QS}=y_1-(-1)+y_2-(-1)=y_1+y_2+2$．

將 $y=x+4$ 改寫成 $x=y-4$，並代入 $x^2=4y$，整理得 $y^2-12y+16=0$，

由根與係數的關係可知，$y_1+y_2=12$，即 $\overline{PR}+\overline{QS}=y_1+y_2+2=14$，

故 $\overline{PF}+\overline{QF}=14$．