第 1 章　空間向量

1-4　外積、體積與行列式

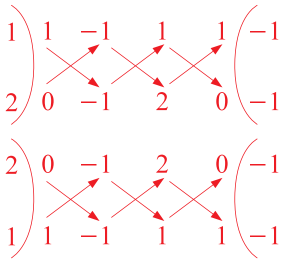
1.　設向量 $\overrightarrow{a}=(1,1,-1)$, $\overrightarrow{b}=(2,0,-1)$,求:

(1) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}$.　(2)由 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 所張出之平行四邊形的面積.

解　(1)根據外積的定義,得

$$\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\left(\begin{vmatrix}1&-1\\0&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&1\\-1&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\2&0\end{vmatrix}\right)=(-1,-1,-2).$$

$$\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}=\left(\begin{vmatrix}0&-1\\1&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&2\\-1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2&0\\1&1\end{vmatrix}\right)=(1,1,2).$$



(2)由 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 所張出之平行四邊形的面積為

$$\left|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{6}.$$

2.　已知 $\overrightarrow{n}$ 與兩向量 $\overrightarrow{a}=(1,-1,0)$, $\overrightarrow{b}=(3,4,-4)$ 均垂直,且 $\left|\overrightarrow{n}\right|=9$,求 $\overrightarrow{n}$.

解　因為 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 和 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 均垂直，所以 $\overrightarrow{n}$ 與 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 平行，即

$\overrightarrow{n}=t\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)$， t 是實數．

計算 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}=\left(\begin{vmatrix}-1&0\\4&-4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&1\\-4&3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&-1\\3&4\end{vmatrix}\right)=(4,4,7)$,可得 $\overrightarrow{n}=t(4,4,7)=(4t,4t,7t)$.

因為 $\left|\overrightarrow{n}\right|=\sqrt{(4t)^2+(4t)^2+(7t)^2}=9|t|$， 又 $\left|\overrightarrow{n}\right|=9$， 所以， $|t|=1$， 解得 $t=\pm1$．

故 $\overrightarrow{n}$ 為 $(4,4,7)$ 或 $(-4,-4,-7)$．

◎3.　(1)求由三向量 $\overrightarrow{a}=(3,1,-1)$，$\overrightarrow{b}=(-2,0,1)$，$\overrightarrow{c}=(2,2,1)$所張出之平行六面體的體積．

(2)已知空間中 $A(1,2,2)$，$B(2,1,3)$，$C(-1,5,1)$，$D(a,1,a)$四點共平面，求 a 的值．

解 (1)利用平行六面體的體積公式，得其體積 V 為

$$V=\left|\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)\cdot\overrightarrow{c}\right|=\left|\left(\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-1&3\\1&-2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3&1\\-2&0\end{vmatrix}\right)\cdot(2,2,1)\right|$$

$$=\left|(1,-1,2)\cdot(2,2,1)\right|=\left|1\cdot2+(-1)\cdot2+2\cdot1\right|=|2|=2\ .$$

(2)因為 A，B，C，D 四點共平面，所以三向量

$$\overrightarrow{AB}=(1,-1,1)，\overrightarrow{AC}=(-2,3,-1)，\overrightarrow{AD}=(a-1,-1,a-2)$$

共平面，所以由 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ 所張出之平行六面體的體積為 0，即

$$\begin{vmatrix}1&-1&1\\-2&3&-1\\a-1&-1&a-2\end{vmatrix}=0,$$

展開得 $3a-6+a-1+2-1-2(a-2)-3(a-1)=0$，

整理得 $-a+1=0$，解得 $a=1$ ．

4.　設 $A(-3,-2,1)$, $B(3,1,1)$, $C(-1,0,2)$ 為空間中三點,求:

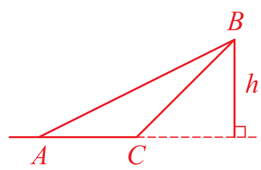
(1) $\triangle ABC$ 的面積．　　　　(2)點 B 到直線 AC 的距離．

解 (1)計算 $\overrightarrow{AB}=(6,3,0)$，$\overrightarrow{AC}=(2,2,1)$，則 $\triangle ABC$ 的面積為

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left|(6,3,0)\times(2,2,1)\right|=\frac{1}{2}\left|(3,-6,6)\right|=\frac{9}{2}\ .$$

(2)由右圖可知:點 B 到直線 AC 的距離,

就是 $\triangle ABC$ 中以 $\overline{AC}$ 為底邊之高 h 的長.



因為 $\overline{AC}=\left|(2,2,1)\right|=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$,

又 $\triangle ABC$ 的面積為 $\dfrac{\overline{AC}\cdot h}{2}=\dfrac{3\cdot h}{2}=\dfrac{9}{2}$,

解得 $h=3$,所以點 B 到直線 AC 的距離為 3.

5. 設 $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$ 是空間中二個不平行的非零向量，且非零向量 $\overrightarrow{n}$ 滿足 $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{b}$．選出正確的選項：

(1) $3\overrightarrow{a}\perp\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)$　　(2) $\overrightarrow{b}\cdot\left(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}\right)=0$

(3) $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}-\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$　　(4) $\overrightarrow{n}=t\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)$，$t$ 是一個實數

(5) $3\overrightarrow{a}+4\overrightarrow{b}=s\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)$，$s$ 是一個實數．

解

(1)因為 $\overrightarrow{a}\perp\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)$，所以 $3\overrightarrow{a}\perp\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)$．

(2)因為 $\overrightarrow{b}\perp\left(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}\right)$，所以 $\overrightarrow{b}\cdot\left(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}\right)=0$．

(3)因為 $\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}=-\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)$，所以 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}-\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{a}=2\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)\neq\overrightarrow{0}$．

(4)因為 $\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)\perp\overrightarrow{a}$，$\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)\perp\overrightarrow{b}$，所以 $\overrightarrow{n}\,//\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)$，即

$\overrightarrow{n}=t\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)$，$t$ 是一個實數．

(5)因為 $\left(3\overrightarrow{a}+4\overrightarrow{b}\right)$ 與 $\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)$ 垂直，而非平行，所以 $3\overrightarrow{a}+4\overrightarrow{b}$ 不能表示成 $\left(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}\right)$ 的係數積.

由上面的討論可知：正確的選項為(1)(2)(4)．

◎6. 求下列各三階行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix}2&1&2\\1&5&1\\2&1&2\end{vmatrix}$．　　(2) $\begin{vmatrix}1&2&1\\3&1&4\\1&5&1\end{vmatrix}$．

解

(1)因為行列式的第一行和第三行相同，所以 $\begin{vmatrix}2&1&2\\1&5&1\\2&1&2\end{vmatrix}=0$．

(2) $\begin{vmatrix}1&2&1\\3&1&4\\1&5&1\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot1+2\cdot4\cdot1+1\cdot3\cdot5-1\cdot4\cdot5-2\cdot3\cdot1-1\cdot1\cdot1$

$=1+8+15-20-6-1=-3$.

◎7.　求下列各三階行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 2 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.　　(2) $\begin{vmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 51 & 52 & 53 \\ 91 & 92 & 93 \end{vmatrix}$.

解 (1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 2 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \times(-2) \times(-3) = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 0 & -7 & -8 \\ 0 & -20 & -16 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -7 & -8 \\ -20 & -16 \end{vmatrix} = 112-160=-48 \text{ .}$$

(2)

$$\overset{\times(-1)\quad\times(-1)}{\begin{vmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 51 & 52 & 53 \\ 91 & 92 & 93 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} 11 & 22 & 11 \\ 51 & 52 & 1 \\ 91 & 92 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 11 & 11 \\ 51 & 1 & 1 \\ 91 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ .}$$

◎8.　設 $\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = 6$，求 $\begin{vmatrix} a+d & d+g & g+a \\ b+e & e+h & h+b \\ c+f & f+i & i+c \end{vmatrix}$ 的值 .

解

$$\begin{vmatrix} a+d & d+g & g+a \\ b+e & e+h & h+b \\ c+f & f+i & i+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d+g & g+a \\ b & e+h & h+b \\ c & f+i & i+c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & d+g & g+a \\ e & e+h & h+b \\ f & f+i & i+c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & d+g & g \\ b & e+h & h \\ c & f+i & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & g & g+a \\ e & h & h+b \\ f & i & i+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & g & a \\ e & h & b \\ f & i & c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = 12 \text{ .}$$

◎9. 下列哪些選項之行列式的值與行列式$\begin{vmatrix} 2 & a & d \\ 2 & b & e \\ 2 & c & f \end{vmatrix}$的值相等?

(1)$\begin{vmatrix} 1 & 2a & d \\ 1 & 2b & e \\ 1 & 2c & f \end{vmatrix}$　(2)$\begin{vmatrix} 2 & a+d & d \\ 2 & b+e & e \\ 2 & c+f & f \end{vmatrix}$　(3)$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \end{vmatrix}$

(4)$\begin{vmatrix} a & 2 & d \\ b & 2 & e \\ c & 2 & f \end{vmatrix}$　(5)$\begin{vmatrix} a & d & 2 \\ b & e & 2 \\ c & f & 2 \end{vmatrix}$.

解

(1)$\begin{vmatrix} 1 & 2a & d \\ 1 & 2b & e \\ 1 & 2c & f \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & a & d \\ 1 & b & e \\ 1 & c & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & a & d \\ 2 & b & e \\ 2 & c & f \end{vmatrix}$.

(2)$\begin{vmatrix} 2 & a+d & d \\ 2 & b+e & e \\ 2 & c+f & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & a & d \\ 2 & b & e \\ 2 & c & f \end{vmatrix}$（將第三行$\times(-1)$加到第二行）

(3)$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & a & d \\ 2 & b & e \\ 2 & c & f \end{vmatrix}$

(行列互換,其值不變)

(4)$\begin{vmatrix} a & 2 & d \\ b & 2 & e \\ c & 2 & f \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & a & d \\ 2 & b & e \\ 2 & c & f \end{vmatrix}$ (兩行互換,其值變號)

(5)$\begin{vmatrix} a & d & 2 \\ b & e & 2 \\ c & f & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & 2 & d \\ b & 2 & e \\ c & 2 & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & a & d \\ 2 & b & e \\ 2 & c & f \end{vmatrix}$.

由上面的算式可知:正確的選項為(1)(2)(3)(5).

◎10. 設 a, b, c 是三個實數,試證明下列各式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$.

(2) $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

解 (1)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} \begin{array}{l} \times(-1) \\ \times(-1) \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & b-a & c(a-b) \\ 0 & c-a & b(a-c) \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} b-a & c(a-b) \\ c-a & b(a-c) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & -c \\ 1 & -b \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$= (a-b)(b-c)(c-a).$$

(2)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \times 1 & \times 1 \end{array} \\ \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} \end{array} = \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & b+c & c+a \\ 2(a+b+c) & c+a & a+b \\ 2(a+b+c) & a+b & b+c \end{vmatrix} = 2 \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \times(-1) & \times(-1) \end{array} \\ \begin{vmatrix} a+b+c & b+c & c+a \\ a+b+c & c+a & a+b \\ a+b+c & a+b & b+c \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= 2 \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \times 1 & \times 1 \end{array} \\ \begin{vmatrix} a+b+c & -a & -b \\ a+b+c & -b & -c \\ a+b+c & -c & -a \end{vmatrix} \end{array} = 2\begin{vmatrix} c & -a & -b \\ a & -b & -c \\ b & -c & -a \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} c & a & b \\ a & b & c \\ b & c & a \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}.$$