第 1 章　空間向量

1-3　空間向量的內積

1. 設 $\overrightarrow{a}=(1,2,2)$，$\overrightarrow{b}=(-2,3,-1)$，求 $\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)$ 的值．

解 計算 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(-1,5,1)$，$2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}=(4,1,5)$，故

$\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)\cdot\left(2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)=(-1,5,1)\cdot(4,1,5)=-4+5+5=6$．

2. 設 $A(-1,2,1)$，$B(0,3,1)$，$C(0,4,2)$ 為空間中三點．求：

(1) $\angle BAC$．　　(2) $\triangle ABC$ 的面積．

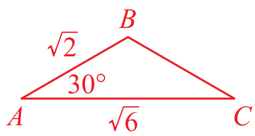
解 計算 $\overrightarrow{AB}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{AC}=(1,2,1)$．

(1)因為 $\cos\angle BAC=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{(1,1,0)\cdot(1,2,1)}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $\angle BAC=30^\circ$．

(2) $\triangle ABC$ 的面積為

$\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\sin\angle BAC=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sin30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．



3. 已知 $\overrightarrow{a}=(2,-1,-1)$ 與 $\overrightarrow{b}=(1,-2,z)$ 的夾角為 60°，求 z 的值．

解 因為 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角為 60°，所以

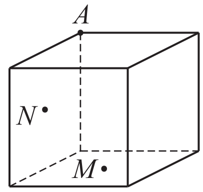
$$\cos60^\circ=\frac{1}{2}=\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{a}\right|\left|\overrightarrow{b}\right|}=\frac{(2,-1,-1)\cdot(1,-2,z)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+(-2)^2+z^2}}=\frac{4-z}{\sqrt{6\left(5+z^2\right)}},$$

且 $4-z>0$，即 $z<4$．

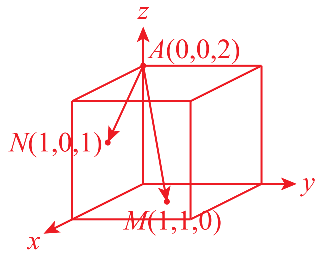
將上式兩邊平方，得 $\dfrac{1}{4}=\dfrac{(4-z)^2}{30+6z^2}$，整理得 $z^2+16z-17=0$，解得 $z=1$ 或 $z=-17$．

因為 $z=1$ 與 $z=-17$ 均滿足 $z<4$，所以 $z=1$ 或 $z=-17$．

4. 右圖是一個邊長為 2 的正立方體，M，N 兩點分別為底面與側面正方形的中心，A 是正立方體的一個頂點，求 $\angle MAN$ 的值．



解　將正立方體放在空間坐標系中，如右圖所示．



因為 $\overrightarrow{AM}=(1,1,-2)$，$\overrightarrow{AN}=(1,0,-1)$，

所以 $\cos\angle MAN=\dfrac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}}{\left|\overrightarrow{AM}\right|\left|\overrightarrow{AN}\right|}$

$$=\frac{1\times1+1\times0+(-2)\times(-1)}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}$$

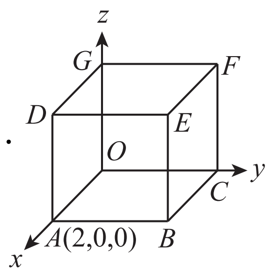
$$=\frac{3}{\sqrt{6}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

因此 $\angle MAN=30^\circ$．

5. 右圖是坐標空間中的一個正立方體，選出正確的選項：

(1) E 點的坐標為 $(2,2,2)$　(2) $\overrightarrow{DC}=(-2,2,-2)$

(3) $\left|\overrightarrow{OE}\right|=2\sqrt{3}$　(4) $\overrightarrow{DG}\perp\overrightarrow{GC}$　(5) $\overrightarrow{BD}$ 和 $\overrightarrow{BG}$ 的夾角為 45°．



解　由 A 點的坐標可知此正立方體的邊長為 2．

(1) E 點的坐標為 $(2,2,2)$ 是正確的．

(2) D 點的坐標為 $(2,0,2)$，C 點的坐標為 $(0,2,0)$，故 $\overrightarrow{DC}=(-2,2,-2)$ 是正確的．

(3)因為 E 的點坐標為 $(2,2,2)$，所以 $\left|\overrightarrow{OE}\right|=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}$ 是正確的．

(4)因為 $\overrightarrow{DG}=(-2,0,0)$，$\overrightarrow{GC}=(0,2,-2)$，計算 $\overrightarrow{DG}\cdot\overrightarrow{GC}=0$，

所以 $\overrightarrow{DG}\perp\overrightarrow{GC}$ 是正確的．

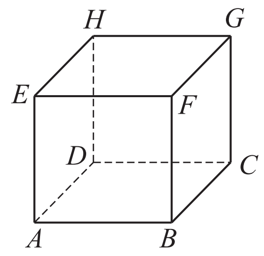
(5)因為 $\overrightarrow{BD}=(0,-2,2)$，$\overrightarrow{BG}=(-2,-2,2)$，計算 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BG}=8$，得兩向量之夾角 θ 的餘弦值為

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BG}}{\left|\overrightarrow{BD}\right|\left|\overrightarrow{BG}\right|}=\frac{8}{2\sqrt{2}\times2\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{6}}\neq\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos45^\circ,$$

所以 $\overrightarrow{BD}$ 和 $\overrightarrow{BG}$ 的夾角不是 45°．

由上面的討論可知：正確的選項為(1)(2)(3)(4)．

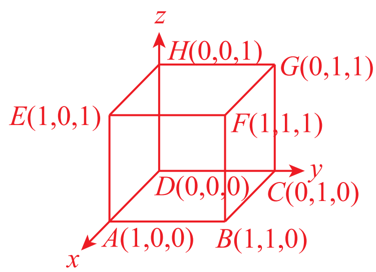
6. 右圖中，$ABCD-EFGH$ 是一個正立方體，選出正確的選項：



(1) $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EG}=0$　(2) $\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EF}=0$　(3) $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{AG}=0$

(4) $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AC}$　(5) $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{EC}$.

解 將正立方體放在坐標空間中，如右圖所示：



(1) $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EG}=(0,0,-1)\cdot(-1,1,0)=0$.

(2) $\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{EF}=(-1,0,-1)\cdot(0,1,0)=0$.

(3) $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{AG}=(-1,1,-1)\cdot(-1,1,1)=1$.

(4) $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AC}$.

(5) $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{EC}$.

由上面的討論可知：正確的選項為(1)(2)(4)(5) .

7. 設 $\overrightarrow{a}$ ，$\overrightarrow{b}$ 是空間中的兩向量，$\left|\overrightarrow{a}\right|=3$，$\left|\overrightarrow{b}\right|=4$，$\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{41}$. 求

(1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 的值 .　(2) $\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|$ 的值 .

解 (1)因為 $\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|^2=\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)=\left|\overrightarrow{a}\right|^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\left|\overrightarrow{b}\right|^2$，

所以 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=\dfrac{\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|^2-\left|\overrightarrow{a}\right|^2-\left|\overrightarrow{b}\right|^2}{2}=\dfrac{41-9-16}{2}=8$.

(2)因為 $\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|^2=\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)=\left|\overrightarrow{a}\right|^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\left|\overrightarrow{b}\right|^2$，

所以 $\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|^2=3^2-2\cdot8+4^2=9$，即 $\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|=3$.

8. 設實數 x，y，z 滿足 $x+2y+4z=12$，求 $x^2+4y^2+4z^2$ 的最小值，並求此時 x，y 與 z 的值 .

解 利用柯西不等式，得 $\left(x^2+(2y)^2+(2z)^2\right)\left(1^2+1^2+2^2\right)\geq(x+2y+4z)^2$，

將 $x+2y+4z=12$ 代入，得 $\left(x^2+4y^2+4z^2\right)\cdot6\geq12^2$，即 $x^2+4y^2+4z^2\geq24$，

而且當 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{2y}{1}=\dfrac{2z}{2}=t$，即 $x=t$，$y=\dfrac{t}{2}$，$z=t$ 時等號才成立．將其代入 $x+2y+4z=12$，得 $6t=12$，解得 $t=2$.

故當 $x=2$，$y=1$，$z=2$ 時，$x^2+4y^2+4z^2$ 有最小值 24 ．

9. 設實數 x，y，z 滿足 $(x-2)^2+y^2+4z^2=9$，求 $2x-y+4z$ 的最大值與最小值，並分別求有最大值與最小值時 x，y 與 z 的值．

解 利用柯西不等式，得

$$\left((x-2)^2+y^2+(2z)^2\right)\left(2^2+(-1)^2+2^2\right)\ge(2x-4-y+4z)^2,$$

將 $(x-2)^2+y^2+4z^2=9$ 代入，得 $9\cdot 9\ge(2x-y+4z-4)^2$，

即 $-9\le 2x-y+4z-4\le 9$，整理得 $-5\le 2x-y+4z\le 13$ ．

而且當 $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{2z}{2}=t$，即 $x=2t+2$，$y=-t$，$z=t$ 時等號才成立．

將其代入 $(x-2)^2+y^2+4z^2=9$，整理得 $9t^2=9$，

解得 $t=\pm1$，即 $(x,y,z)=(4,-1,1)$ 或 $(0,1,-1)$ ．

故當 $x=4$，$y=-1$，$z=1$ 時，$2x-y+4z$ 有最大值 13；

當 $x=0$，$y=1$，$z=-1$ 時，$2x-y+4z$ 有最小值 -5 ．

10. 已知空間中三點 $P(1,-1,2)$，$Q(-3,-3,-2)$，$R(-3,0,1)$，求

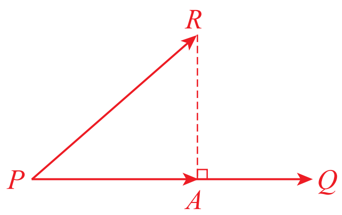
(1)向量 $\overrightarrow{PR}$ 在 $\overrightarrow{PQ}$ 上的正射影．　(2)點 R 到直線 PQ 的最短距離．

解 (1)設 $\overrightarrow{PR}$ 在 $\overrightarrow{PQ}$ 上的正射影為 $\overrightarrow{a}$，計算 $\overrightarrow{PR}=(-4,1,-1)$，$\overrightarrow{PQ}=(-4,-2,-4)$，

利用正射影公式，得 $\overrightarrow{a}=\left(\frac{\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{PQ}}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2}\right)\overrightarrow{PQ}=\left(\frac{18}{36}\right)\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}=(-2,-1,-2)$ ．

故 $\overrightarrow{PR}$ 在 $\overrightarrow{PQ}$ 上的正射影為 $(-2,-1,-2)$ ．

(2)設 $\overrightarrow{PR}$ 在 $\overrightarrow{PQ}$ 上的正射影為 $\overrightarrow{PA}$，如圖所示：

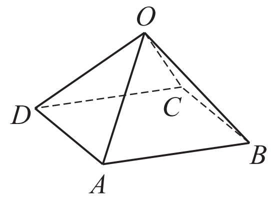


可知點 R 到直線 PQ 的最短距離為 $\left|\overrightarrow{RA}\right|$ ．

計算 $\overrightarrow{RA}=\overrightarrow{RP}+\overrightarrow{PA}=(4,-1,1)+(-2,-1,-2)=(2,-2,-1)$，

故點 R 到直線 PQ 的最短距離 $\left|\overrightarrow{RA}\right|=\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}=3$ ．

11. 右圖中，$O-ABCD$ 是一個各邊長均為 2 的四角錐，其中 $ABCD$ 是一個正方形．選出正確的選項：

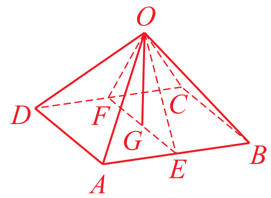


(1) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{0}$　(2) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{0}$

(3) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{0}$　(4) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$

(5) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=2$ ．　[仿 93 學測]

解　設點 O 在底面 $ABCD$ 的投影點為 G，點 E， F 分別為 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 的中點．



(1) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\left(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}\right)=4\overrightarrow{OG}\neq\overrightarrow{0}$ ．

(2) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=2\left(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OF}\right)\neq\overrightarrow{0}$ ．

(3) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)=2\overrightarrow{OG}-2\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{0}$ ．

(4)因為邊長均為 2，且 $\angle AOB=\angle COD=60°$，

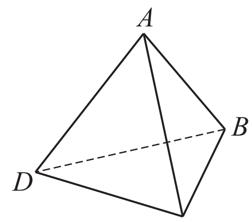
所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2\cdot2\cdot\cos60°=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}$ ．

(5)因為 $\overline{OA}=\overline{OC}=2$，$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，即 $\triangle AOC$ 之三邊長為 2，2，$2\sqrt{2}$，

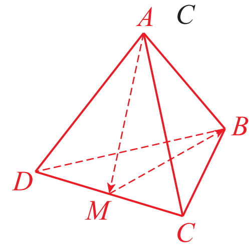
所以 $\triangle AOC$ 是等腰直角三角形，可得 $\overline{OA}\perp\overline{OC}$，故 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=0$ ．

由上面的討論可知：正確的選項為(3)(4)．

12. 右圖中，$ABCD$ 是一個正四面體，證明：$\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$ 垂直．



解　取 $\overline{CD}$ 的中點 M，連接 $\overline{AM}$，$\overline{BM}$，如右圖所示．



因為 $\triangle ACD$，$\triangle BCD$ 皆為正三角形，

所以 $\overline{AM}\perp\overline{CD}$，$\overline{BM}\perp\overline{CD}$，即

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}=0$，$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ ．

計算 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right)\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CD}=0+0=0$，

因此 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$ 垂直．