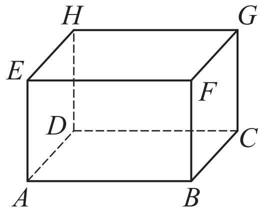
第 1 章　空間向量

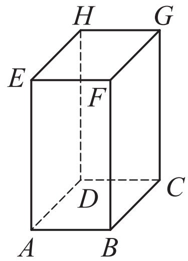
1-1　空間概念

1.　右圖是一個長方體，下列哪些直線與直線 AB 歪斜?
(1)直線 CD　(2)直線 CG　(3)直線 CH　(4)直線 AG
(5)直線 HG .

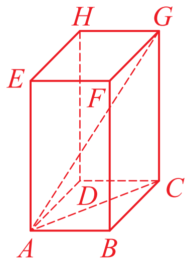


解　(1)直線 CD 與直線 AB 平行 .　(2)直線 CG 與直線 AB 歪斜 .
(3)直線 CH 與直線 AB 歪斜 .　(4)直線 AG 與直線 AB 交於 A 點.
(5)直線 HG 與直線 AB 平行 .
由上面的討論可知：正確的選項為(2)(3) .

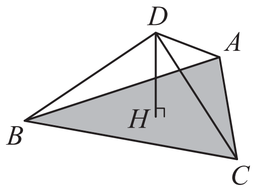
2.　右圖中，$ABCD-EFGH$ 是一個長方體，$ABCD$ 是一個邊長為 2 的正方形．若 $\overline{AG}=2\sqrt{6}$，則長方體的體積為何?



解　因為 $\overline{AG}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CG}^2}$ ，
所以 $2\sqrt{6}=\sqrt{2^2+2^2+\overline{CG}^2}$ ，解得 $\overline{CG}=4$,
即以正方形 $ABCD$ 為底面時，長方體的高為 4 ,
因此其體積為 $2\times2\times4=16$.

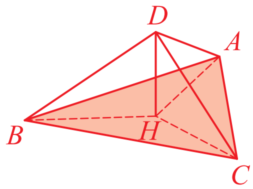


3. 右圖是一個四面體 $D-ABC$，其中 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}=6$，$\overline{DA}=\overline{DB}=\overline{DC}=4$，從頂點 D 對底面 ABC 做垂直線 DH 交底面於 H 點，線段 $\overline{DH}$ 稱為此四面體的一個高．求：



(1)高 $\overline{DH}$ 的長． (2)底面 ABC 與側面 BCD 所夾之二面角 θ 的餘弦值．

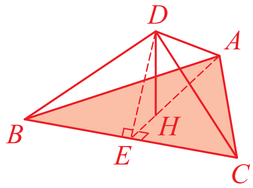
解 因為 $\overline{DH}$ 與底面 ABC 垂直，可得 $\overline{DH}$ 與 $\overline{AH}$，$\overline{BH}$，$\overline{CH}$ 均垂直，又 $\overline{AD}=\overline{BD}=\overline{CD}$，所以 $\triangle ADH$，$\triangle BDH$，$\triangle CDH$ 為全等三角形，因此由畢氏定理可知



$\overline{AH}=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{DH}^2}=\overline{BH}=\overline{CH}$，即 H 為 $\triangle ABC$ 的外心，亦為重心．

設 E 為 $\overline{BC}$ 的中點．

(1)因為 $\triangle ABC$ 為正三角形，$\triangle BCD$ 為等腰三角形，所以 $\overline{AE}$ 與 $\overline{DE}$ 均垂直 $\overline{BC}$ 於 E 點，且因為 H 為 $\triangle ABC$ 的重心，所以



$\overline{AH}=\frac{2}{3}\overline{AE}=\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AC}\right)=2\sqrt{3}$．

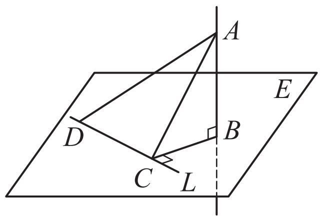
計算 $\overline{DH}=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{4^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2$．

(2)因為 $\angle AED$ 為底面 ABC 與側面 BCD 所夾的二面角 θ，又

$\overline{DE}=\sqrt{\overline{CD}^2-\overline{CE}^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$，

所以 $\cos\theta=\frac{\overline{HE}}{\overline{DE}}=\frac{\frac{1}{3}\overline{AE}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$．

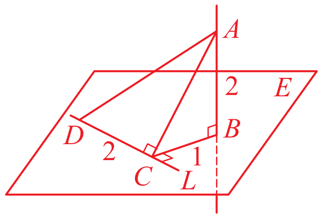
4. 設直線 AB 垂直平面 E 於 B 點，且 L 是平面 E 上一條直線，D 是 L 上一點，如右圖所示．若直線 BC 垂直 L 於 C 點，且 $\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=1$，$\overline{CD}=2$，則 $\overline{AD}$ 的長度為何?



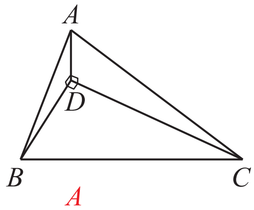
解 因為直線 AB 垂直平面 E 於 B 點，所以 $\overline{AB}\perp\overline{BC}$，因此由畢氏定理可得：$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$．

又由三垂線定理可知：$\overline{AC}\perp\overline{DC}$，因此

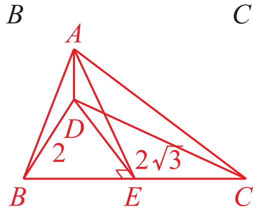
由畢氏定理可得：$\overline{AD}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{CD}^2}=\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2+2^2}=\sqrt{9}=3$．



5. 右圖是一個四面體，$\overline{AD}=1$，$\overline{BD}=2$，$\overline{CD}=2\sqrt{3}$，且 $\overline{AD}$，$\overline{BD}$，$\overline{DC}$ 兩兩互相垂直於 D 點，求點 A 到 $\overline{BC}$ 的最短距離．



解 過點 D 作 $\overline{DE}$ 垂直 $\overline{BC}$ 於 E 點．因為 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BD}$，$\overline{DC}$ 均垂直，所以 $\overline{AD}$ 與平面 BCD 垂直，且由三垂線定理可知：點 A 到 $\overline{BC}$ 的最短距離為 $\overline{AE}$．



因為 $\overline{BD}$ 與 $\overline{DC}$ 垂直，所以由畢氏定理可得：

$$\overline{BC}=\sqrt{\overline{BD}^2+\overline{DC}^2}=\sqrt{2^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{16}=4\ .$$

由 $\triangle BCD$ 的面積為

$$\frac{\overline{BD}\cdot\overline{DC}}{2}=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{DE}}{2}\quad\Rightarrow\quad\frac{2\cdot2\sqrt{3}}{2}=\frac{4\cdot\overline{DE}}{2},$$

解得 $\overline{DE}=\sqrt{3}$．

因為 $\overline{AD}$ 與平面 BCD 垂直，所以 $\triangle ADE$ 是一個直角三角形，因此

$$\overline{AE}=\sqrt{\overline{AD}^2+\overline{DE}^2}=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2,$$

故點 A 到 $\overline{BC}$ 的最短距離為 2．

6. 設 A，B，C 為空間中三點，且不在同一直線上．問：

(1)空間所有滿足 $\overline{PA}=\overline{PB}$ 的 P 點所形成的圖形為何？

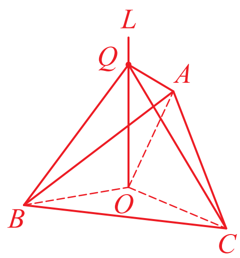
①一點　②一線段　③一直線　④一平面．

(2)空間所有滿足 $\overline{QA}=\overline{QB}=\overline{QC}$ 的 Q 點所形成的圖形為何？

①一點　②一線段　③一直線　④一平面．

解 (1)空間中所有滿足 $\overline{PA}=\overline{PB}$ 的 P 點所形成的圖形為一平面，

我們稱其為 $\overline{AB}$ 的垂直平分面．故正確的選項為④．



(2)設 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，即 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$．

取 Q 為通過點 O 與平面 ABC 垂直的直線上的任意點，

則由畢氏定理可知：

$$\overline{QA}=\sqrt{\overline{OA}^2+\overline{QO}^2}=\sqrt{\overline{OB}^2+\overline{QO}^2}=\overline{QB}=\sqrt{\overline{OC}^2+\overline{QO}^2}=\overline{QC},$$

即直線上的點 Q 均滿足 $\overline{QA}=\overline{QB}=\overline{QC}$．故正確的選項為③．

7. 選出正確的選項:

(1)空間中，垂直於同一直線的兩相異直線必互相平行

(2)空間中，平行於同一直線的兩相異直線必互相平行

(3)空間中，垂直於同一平面的兩相異直線必互相平行

(4)空間中，平行於同一平面的兩相異直線必互相平行

(5)空間中，垂直於同一直線的兩相異平面必互相平行．

解 (1)垂直於同一直線的兩相異直線也可能歪斜或交於一點．

(2)平行於同一直線的兩相異直線必互相平行是正確的．

(3)垂直於同一平面的兩相異直線必互相平行是正確的．

(4)平行於同一平面的兩相異直線也可能歪斜或交於一點．

(5)垂直於同一直線的兩相異平面必互相平行是正確的．

由上面的討論可知：正確的選項為(2)(3)(5)．

8. 在空間中，下列哪些條件恰可以決定一個平面:

(1)三個相異點 (2)兩條平行直線 (3)兩條歪斜直線

(4)一直線及此直線外一點 (5)恰交於一點的兩相異直線．

解 (1)此三點必須不在同一直線上，才恰有一個平面．若此三點在同一直線上，則有很多個平面同時通過此三點．

(3)因為兩條歪斜線並不在同一個平面上，所以沒有平面會通過兩條歪斜直線．

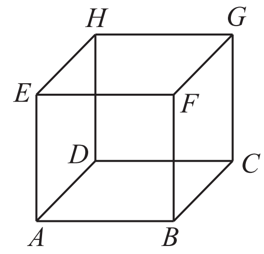
除了(1)(3)之外的選項均是正確的，故正確的選項為(2)(4)(5)．

9.　右圖中，$ABCD-EFGH$ 是一個邊長為1的正六面體，求：

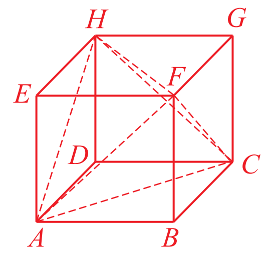
(1)四面體 $ACFH$ 的表面積．

(2)四面體 $ACFH$ 的體積．

（四面體的體積為底面積乘以高除以 3）[92 指乙]



解　因為四面體 $ACFH$ 的每邊長均為 $\sqrt{2}$，所以是一個正四面體．



(1)表面積是 4 個邊長為 $\sqrt{2}$ 之正三角形的面積和．

因為邊長 $\sqrt{2}$ 之正三角形的面積為 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以四面體的表面積為 $4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$．

(2)直接計算體積比較困難，可以扣掉 4 個全等的四面體比較簡單．

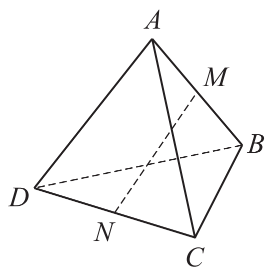
四面體 $ACFH$ 的體積可由正六面體扣掉 $AEHF$，$ABCF$，$GHFC$，$ACDH$ 4 個四面體的體積得到．

因為這 4 個四面體的體積均為 $\left(\dfrac{1}{2}\times1\times1\right)\times1\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$，

所以四面體 $ACFH$ 的體積為 $1-4\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$．

10.　右圖中，$ABCD$ 是一個邊長為 2 的正四面體，M，N 分別為 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 的中點．

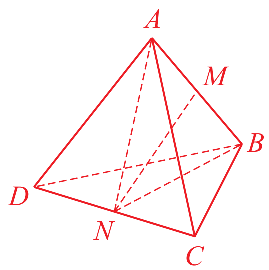
(1)說明 $\overline{MN}$ 與 $\overline{AB}$ 垂直．　　(2)求 $\overline{MN}$ 的長．



解　(1)連接 $\overline{AN}$，$\overline{BN}$，如右圖所示．

因為 $\triangle ACD$ 與 $\triangle BCD$ 均為正三角形，所以 $\overline{AN}$，$\overline{BN}$ 分別為 $\triangle ACD$ 與 $\triangle BCD$ 的中線，且

$$\overline{AN}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}=\overline{BN}\ .$$



因為 $\overline{AN}=\overline{BN}$，所以 $\triangle ABN$ 是一個等腰三角形，又因為 M 為 $\overline{AB}$ 的中點，所以 $\overline{MN}$ 是 $\overline{AB}$ 的中垂線，即 $\overline{MN}$ 與 $\overline{AB}$ 垂直．

(2)利用畢氏定理得

$$\overline{MN}=\sqrt{\overline{AN}^2-\overline{AM}^2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2}=\sqrt{2}\,,$$

因此 $\overline{MN}$ 的長為 $\sqrt{2}$．