

第4章 數據分析

4-1 一維數據分析

重點一 平均數、中位數、眾數

例題 1

某次考試，10位學生數學成績如下：79，85，50，56，78，63，65，73，46，49，則算術平均數為_____分。(8分)

解 算術平均數 $\mu = (79 + 85 + 50 + 56 + 78 + 63 + 65 + 73 + 46 + 49) \div 10$
 $= \frac{644}{10} = 64.4$ (分)

例題 2

某公司 55 位職員的月薪及人數分配表如下，則平均月薪為_____元。(8分)

月薪(元)	30000	32000	35000	40000	50500
人數	5	10	20	18	2

解 平均月薪為
 $(30000 \times 5 + 32000 \times 10 + 35000 \times 20 + 40000 \times 18 + 50500 \times 2) \div 55$
 $= 1991000 \div 55 = 36200$ (元)

例題 3

(1) 6，27，60，10.8 的幾何平均數為_____。(4分)

(2) 琳瑯開設一公司，營業額連續三年的成長率依序為-20%，20%，80%，則此公司這三年的平均營業額年成長率為_____。(4分)

解 (1) 所求的幾何平均數為

$$\begin{aligned} & \sqrt[4]{6 \times 27 \times 60 \times 10.8} \\ &= \sqrt[4]{6 \times 27 \times 6 \times 108} \\ &= \sqrt[4]{(2 \times 3) \times 3^3 \times (2 \times 3) \times (2^2 \times 3^3)} \\ &= \sqrt[4]{2^4 \times 3^8} \\ &= 2 \times 3^2 = 18 \end{aligned}$$

(2) 設平均營業額年成長率為 r

$$\begin{aligned} \text{得 } 1+r &= \sqrt[3]{(1-0.2) \times (1+0.2) \times (1+0.8)} \\ &= \sqrt[3]{0.8 \times 1.2 \times 1.8} \\ &= \sqrt[3]{0.001 \times 8 \times 12 \times 18} = \sqrt[3]{(0.1)^3 \times 2^3 \times 2^2 \times 3 \times 2 \times 3^2} \\ &= \sqrt[3]{(0.1)^3 \times 2^6 \times 3^3} = \sqrt[3]{(0.1 \times 2^2 \times 3)^3} = 1.2 \end{aligned}$$

故平均營業額年成長率為 20%

例題 4

某次考試甲、乙兩組的數學分數如下：

甲組：49，40，46，45，31，50，75，53，70，55，58，60，57

乙組：64，50，81，73，85，59，64，77，70，79

則：(1)甲組之中位數為_____分。(4分)

(2)乙組之中位數為_____分。(4分)

解 (1) 將數據由小到大排列得 31, 40, 45, 46, 49, 50, 53, 55, 57, 58, 60, 70, 75, 共 13 個分數

∴中位數為第 7 位同學的分數即 53 分

(2) 將數據由小到大排列得 50, 59, 64, 64, 70, 73, 77, 79, 81, 85, 共 10 個分數

∴中位數為第 5 位、第 6 位同學的平均分數

$$\text{即 } \frac{70+73}{2} = 71.5 \text{ (分)}$$

例題 5

右表為某班 37 個學生家庭人口數的次數分配表，則：

家庭人數	3	4	5	6	7
次 數	4	5	10	12	6

(1) 中位數為_____人。(4分)

(2) 眾數為_____人。(4分)

解 (1) 中位數為 5 人

(2) 眾數為 6 人

重點二 變異數與標準差

例題 6

十位學生的數學測驗分數分別為 62, 82, 61, 85, 67, 79, 80, 73, 86, 95, 則此資料的

(1) 算術平均數為_____分。(3分)

(2) 變異數為_____。(3分)

(3) 標準差為_____分。(四捨五入取到小數點後第一位)(3分)

解 (1) 算術平均數 $\mu = \frac{62+82+61+85+67+79+80+73+86+95}{10} = 77$ (分)

$$\begin{aligned} (2) \text{ 變異數 } \sigma^2 &= \frac{1}{10} \times [(62-77)^2 + (82-77)^2 + (61-77)^2 + (85-77)^2 \\ &\quad + (67-77)^2 + (79-77)^2 + (80-77)^2 + (73-77)^2 \\ &\quad + (86-77)^2 + (95-77)^2] \\ &= \frac{1}{10} \times (225 + 25 + 256 + 64 + 100 + 4 + 9 + 16 + 81 + 324) \\ &= \frac{1}{10} \times 1104 = 110.4 \end{aligned}$$

(3) 標準差 $\sigma = \sqrt{110.4} \approx 10.5$ (分)

例題 7

有一分組資料如右表，則：

(1) 算術平均數為_____。(3分)

(2) 變異數為_____。(3分)

(3) 標準差為_____。(四捨五入取到小數點後第二位)(3分)

數 值	6	12	18	24	30
次 數	1	3	4	3	1

解 (1) 算術平均數 $\mu = \frac{1}{12} (6 \times 1 + 12 \times 3 + 18 \times 4 + 24 \times 3 + 30 \times 1)$
 $= \frac{1}{12} \times 216 = 18$

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ 變異數 } \sigma^2 &= \frac{1}{12} [1 \times (6-18)^2 + 3 \times (12-18)^2 + 4 \times (18-18)^2 + 3 \times (24-18)^2 \\
 &\quad + 1 \times (30-18)^2] \\
 &= \frac{1}{12} (144 + 108 + 0 + 108 + 144) \\
 &= \frac{1}{12} \times 504 = 42 \\
 (3) \text{ 標準差 } \sigma &= \sqrt{42} \approx 6.48
 \end{aligned}$$

例題 8

某班學生 50 人，分成甲、乙兩組，其成績如右表，則全班之

組別	人數	平均成績	標準差
甲	20	75	8
乙	30	80	6

- (1) 算術平均數為_____分。(4分)
 (2) 若標準差為 \sqrt{A} 分，則 $A =$ _____。(4分)

解 (1) $\mu_{\text{全}} = \frac{20 \times 75 + 30 \times 80}{20 + 30} = 78$ (分)

$$(2) 8 = \sigma_{\text{甲}} = \sqrt{\frac{1}{20} \sum x_{\text{甲}}^2 - 75^2} \Rightarrow \sum x_{\text{甲}}^2 = 113780$$

$$6 = \sigma_{\text{乙}} = \sqrt{\frac{1}{30} \sum x_{\text{乙}}^2 - 80^2} \Rightarrow \sum x_{\text{乙}}^2 = 193080$$

$$\sigma_{\text{全}} = \sqrt{\frac{1}{50} (113780 + 193080) - 78^2} = \sqrt{53.2} \text{ (分)}$$

$$\Rightarrow A = 53.2$$

重點三 數據的伸縮與平移

例題 9

根據統計資料，1 月分臺北地區的平均氣溫是攝氏 16 度，標準差是攝氏 3.5 度。一般外國朋友比較習慣用華氏溫度來表示冷熱，已知當攝氏溫度為 x 度時，華氏溫度為 $y = \frac{9}{5}x + 32$ 度；

若用華氏溫度表示，則 1 月分臺北地區的

- (1) 平均氣溫是華氏_____度。(3分)
 (2) 標準差是華氏_____度。(3分)

解 (1) $\mu_y = \frac{9}{5}\mu_x + 32 = \frac{9}{5} \times 16 + 32 = 60.8$ (度)

$$(2) \sigma_y = \frac{9}{5}\sigma_x = \frac{9}{5} \times 3.5 = 6.3 \text{ (度)}$$

例題 10

有 n 個數值 x_1, x_2, \dots, x_n 的算術平均數為 40，中位數為 45，眾數為 43，標準差為 3，求 $-4x_1 + 3, -4x_2 + 3, \dots, -4x_n + 3$ 的

- (1) 算術平均數為_____。(3分) (2) 中位數為_____。(3分)
 (3) 眾數為_____。(3分) (4) 標準差為_____。(3分)

解 (1) $(-4) \times 40 + 3 = -157$
 (2) $(-4) \times 45 + 3 = -177$

(3) $(-4) \times 43 + 3 = -169$

(4) $|(-4)| \times 3 = 12$

重點四 數據的標準化**例題 11**

已知五位同學的身高與體重如下表所示：

身高 x (公分)	163	165	167	171	174
體重 y (公斤)	48	54	62	66	70

試求這兩組的標準化數據。(8分)

解 (1) 算術平均數 $\mu_x = \frac{1}{5} (163 + 165 + 167 + 171 + 174) = 168$

$$\begin{aligned} \text{標準差 } \sigma_x &= \sqrt{\frac{1}{5} [(163-168)^2 + (165-168)^2 + (167-168)^2 + (171-168)^2 + (174-168)^2]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{5} \times (25+9+1+9+36)} = \sqrt{16} = 4 \end{aligned}$$

將各身高的數據減去算術平均數得 $-5, -3, -1, 3, 6$ ，再除以標準差 4 故得出身高的標準化數據為 $-1.25, -0.75, -0.25, 0.75, 1.5$

(2) 算術平均數 $\mu_y = \frac{1}{5} (48 + 54 + 62 + 66 + 70) = 60$

$$\begin{aligned} \text{標準差 } \sigma_y &= \sqrt{\frac{1}{5} [(48-60)^2 + (54-60)^2 + (62-60)^2 + (66-60)^2 + (70-60)^2]} \\ &= \sqrt{\frac{1}{5} \times (144+36+4+36+100)} = \sqrt{64} = 8 \end{aligned}$$

將各體重的數據減去算術平均數得 $-12, -6, 2, 6, 10$ ，再除以標準差 8 故得出體重的標準化數據為 $-1.5, -0.75, 0.25, 0.75, 1.25$

例題 12

輕翔班上期中考試的算術平均數為 80 分，標準差為 5 分，期末考試的算術平均數為 72 分，標準差為 4 分，又輕翔期中考試成績為 84 分，期末考試成績為 77 分，試問輕翔哪一次考試的班級排名較佳？(8分)

解 期中考的算術平均數 $\mu_{中} = 80$ ，標準差 $\sigma_{中} = 5$

期末考的算術平均數 $\mu_{末} = 72$ ，標準差 $\sigma_{末} = 4$

將成績經標準化後

期中考 $\frac{84-80}{5} = 0.8$ ，表成績比平均多 0.8 個標準差

期末考 $\frac{77-72}{4} = 1.25$ ，表成績比平均多 1.25 個標準差

∴ 期末考的班級排名較佳