3-3　條件機率、貝氏定理與獨立事件

重點一　條件機率

例題 1

擲一顆公正骰子兩次，設 A 表兩次點數和大於 7 的事件，B 表第一次出現 5 點的事件，則 $P(B\mid A)=$______。（10 分）

解

點數和	出現情形
8	$(2,6)$，$(3,5)$，$(4,4)$，$\boxed{(5,3)}$，$(6,2)$
9	$(3,6)$，$(4,5)$，$\boxed{(5,4)}$，$(6,3)$
10	$(4,6)$，$\boxed{(5,5)}$，$(6,4)$
11	$\boxed{(5,6)}$，$(6,5)$
12	$(6,6)$

由以上可知 $n(A)=5+4+3+2+1=15$

$n(A\cap B)=4$

$\therefore P(B\mid A)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}=\dfrac{4}{15}$

例題 2

設 A，B 為兩事件，若 $P(A)=\dfrac{1}{2}$，$P(B)=\dfrac{1}{3}$，$P(A\cup B)=\dfrac{7}{12}$，則下列各選項中哪些是正確的？（10 分）

(A)$P(A\cap B)=\dfrac{1}{4}$　(B)$P(A\mid B)=\dfrac{3}{4}$　(C)$P(B\mid A)=\dfrac{3}{4}$

(D)$P(A'\mid B')=\dfrac{5}{6}$　(E)$P(B'\mid A')=\dfrac{5}{6}$。

解　(A)○：$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{7}{12}=\dfrac{6+4-7}{12}=\dfrac{1}{4}$

(B)○：$P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{4}$

(C)×：$P(B\mid A)=\dfrac{P(B\cap A)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}$

(D)×：$P(A'\mid B')=\dfrac{P(A'\cap B')}{P(B')}=\dfrac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}$

$=\dfrac{1-\frac{7}{12}}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}}=\dfrac{5}{8}$

(E) ○：$P\left(B' \mid A'\right)=\dfrac{P(B'\cap A')}{P(A')}=\dfrac{1-P(A\cup B)}{1-P(A)}=\dfrac{1-\frac{7}{12}}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{5}{12}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{5}{6}$

故選(A)(B)(E)

例題 3

已知有標上 1，2，3，4，5，6，7，8，9 數字的 9 張卡片，今從其中任取一張，取出後不再放回，連取兩次，則兩次都是奇數的機率為______。(8 分)

解　奇數：{1 , 3 , 5 , 7 , 9}
偶數：{2 , 4 , 6 , 8}
令 A 表第一次取到奇數的事件
B 表第二次取到奇數的事件
由條件機率的乘法法則，得
$P(A\cap B)=P(A)P(B\mid A)=\dfrac{5}{9}\times\dfrac{4}{8}=\dfrac{5}{18}$

例題 4

一袋中有 3 個白球，4 個紅球，5 個黑球，今自袋中依次共取出 3 個球不放回，若每一次取球時，每一球被取到的機會均等，則：
(1) 這三球皆為異色球的機率為______。(5 分)
(2) 在第三次取出為黑球的機率為______。(5 分)

解　(1) 三球皆為異色的機率
＝（白、紅、黑）＋（白、黑、紅）＋（紅、白、黑）
＋（紅、黑、白）＋（黑、白、紅）＋（黑、紅、白）

$=\left(\dfrac{3}{12}\times\dfrac{4}{11}\times\dfrac{5}{10}\right)+\left(\dfrac{3}{12}\times\dfrac{5}{11}\times\dfrac{4}{10}\right)+\left(\dfrac{4}{12}\times\dfrac{3}{11}\times\dfrac{5}{10}\right)$

$+\left(\dfrac{4}{12}\times\dfrac{5}{11}\times\dfrac{3}{10}\right)+\left(\dfrac{5}{12}\times\dfrac{3}{11}\times\dfrac{4}{10}\right)+\left(\dfrac{5}{12}\times\dfrac{4}{11}\times\dfrac{3}{10}\right)$

$=\dfrac{5\times4\times3}{12\times11\times10}\times6=\dfrac{3}{11}$

(2) 第三次取出為黑球的機率
＝（非黑、非黑、黑）＋（非黑、黑、黑）＋（黑、非黑、黑）＋（黑、黑、黑）

$=\left(\dfrac{7}{12}\times\dfrac{6}{11}\times\dfrac{5}{10}\right)+\left(\dfrac{7}{12}\times\dfrac{5}{11}\times\dfrac{4}{10}\right)+\left(\dfrac{5}{12}\times\dfrac{7}{11}\times\dfrac{4}{10}\right)+\left(\dfrac{5}{12}\times\dfrac{4}{11}\times\dfrac{3}{10}\right)$

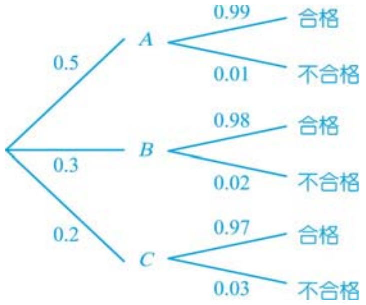
$=\dfrac{5}{12}$

重點二　貝氏定理

例題 5

專門生產彩色電視面板的某公司有 A、B、C 三個生產工廠，產量分別為 50%、30%、20%，又工廠所生產產品的不合格率分別是 1%、2%、3%，則整個公司產品的不合格率為______。

解　利用下列的樹狀圖：(8 分)



P（不合格）$=P$（A）P（不合格｜A）$+P$（B）P（不合格｜B）

$+P$（C）P（不合格｜C）

$=0.5\times0.01+0.3\times0.02+0.2\times0.03$

$=0.017$

故整個公司產品的不合格率為 1.7%

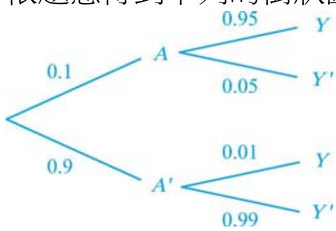
例題 6

所有參加奧林匹克世運會的運動選手都要通過事先的藥物檢定，這種檢定對未服藥者的正確率達到 99%，但對服藥者檢定出來有服藥的正確率只達到 95%。現在有一群游泳選手已知 90%沒有服藥，今從中任意抽取 1 人，檢定出此人有服藥，求此人確實有服藥的機率______。（百分比以下四捨五入）（10 分）

解　以 A，A'分別表示有服藥與未服藥的事件，

而以 Y，Y'分別表示檢驗有藥物反應與沒有藥物反應的事件，

依題意得到下列的樹狀圖：



所求機率為 P（A｜Y）$=\dfrac{P(A\cap Y)}{P(Y)}=\dfrac{P(A)\ P(Y|\ A)}{P(A)\ P(Y|\ A)\ P(A')\ P(Y|\ A')}$

$=\dfrac{0.1\times0.95}{0.1\times0.95+0.9\times0.01}$

$=\dfrac{95}{104}\approx0.91=91\%$

例題 7

某校學生中，高一占 40%，高二占 35%，高三占 25%，已知高一學生中有 60%是近視者，高二學生中有 70%是近視者，高三學生中有 90%是近視者，從該校學生中任意抽選一人，則：

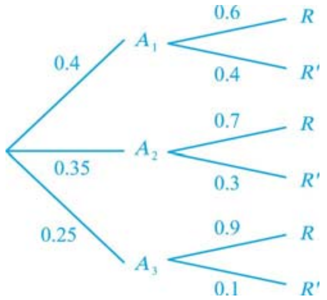
(1) 此人不患近視的機率為______。（5 分）

(2) 若所抽選一人是患近視，則此人為高二學生的機率是______。（5 分）

解　設 A_1、A_2、A_3 依次表抽中一人為高一、高二、高三學生的事件，

R 表所選一人患近視的事件，則：

依題意得到下列的樹狀圖：



(1) $P(R)=P(A_1)P(R\mid A_1)+P(A_2)P(R\mid A_2)+P(A_3)P(R\mid A_3)$

$$=\frac{40}{100}\times\frac{60}{100}+\frac{35}{100}\times\frac{70}{100}+\frac{25}{100}\times\frac{90}{100}$$

$$=\frac{7100}{10000}=\frac{71}{100}$$

$\therefore P(R')=1-P(R)=\dfrac{29}{100}$

(2) $P(A_2\mid R)=\dfrac{P(A_2\cap R)}{P(R)}$

$$=\frac{\frac{35}{100}\times\frac{70}{100}}{\frac{71}{100}}$$

$$=\frac{2450}{7100}=\frac{49}{142}$$

重點三　獨立事件

例題 8

投擲一顆公正骰子兩次，並定義下面三事件：

事件 A：第一次出現點數為 3

事件 B：點數和為 7

事件 C：點數和為 8

試問：

(1) A 與 B 是否為獨立事件。(5 分)

(2) A 與 C 是否為獨立事件。(5 分)

解　以數對 (a,b) 表示前後兩次骰子出現的點數，

樣本空間 $S=\{(a,b)\mid a，b$ 是正整數且 $1\le a\le 6，1\le b\le 6\}$，有 36 個元素

(1) $A=\{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}$，

$B=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$，

$A\cap B=\{(3,4)\}$

故 $P(A)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$，$P(B)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$，$P(A\cap B)=\dfrac{1}{36}$

$\because P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$\therefore A$ 與 B 為獨立事件

(2) $C=\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$

$A\cap C=\{(3,5)\}$

故 $P(C)=\dfrac{5}{36}$，$P(A\cap C)=\dfrac{1}{36}$

$\because P(A\cap C)\neq P(A)P(C)=\frac{1}{6}\times\frac{5}{36}$

$\therefore A$ 與 C 不是獨立事件，為相依事件

例題 9

設 A，B 為獨立事件，若 $P(A)=\frac{7}{12}$，$P(A\cup B)=\frac{2}{3}$，則：

(1) $P(B)=$______。(4 分)

(2) $P(A\mid B)=$______。(4 分)

(3) $P(A'\cap B)=$______。(4 分)

解 (1) $\because A$，B 為獨立事件

$\therefore P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{7}{12}P(B)$

又 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$\Rightarrow \frac{2}{3}=\frac{7}{12}+P(B)-\frac{7}{12}P(B)$

$\Rightarrow \frac{5}{12}P(B)=\frac{1}{12}\Rightarrow P(B)=\frac{1}{5}$

(2) $\because A$，B 為獨立事件

$\therefore P(A\mid B)=P(A)=\frac{7}{12}$

(3) $\because A$，B 為獨立事件

$\therefore A'$，B 為獨立事件

$$\begin{aligned}\Rightarrow P(A'\cap B)&=P(A')P(B)\\&=\left(1-\frac{7}{12}\right)\times\frac{1}{5}\\&=\frac{5}{12}\times\frac{1}{5}\\&=\frac{1}{12}\end{aligned}$$

例題 10

甲、乙兩人同時翻譯一件密碼，甲、乙兩人譯出的機率分別為 $\frac{1}{5}$ 與 $\frac{1}{3}$，且兩人譯出與否互不影響，則：

(1) 兩人均譯出的機率為______。(4 分)

(2) 兩人均沒有譯出的機率為______。(4 分)

(3) 至少有一人譯出的機率為______。(4 分)

解 設 A 表甲譯出的機率

B 表乙譯出的機率

則 $P(A)=\frac{1}{5}$，$P(B)=\frac{1}{3}$

(1) $\because A$，B 為獨立事件

$\therefore P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{15}$

(2) $\because A$，B 為獨立事件

$\therefore A'$，B'也是獨立事件

所求機率為 $P(A'\cap B')=P(A')P(B')$

$=(1-P(A))(1-P(B))$

$=\left(1-\frac{1}{5}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)$

$=\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}$

$=\frac{8}{15}$

(3) 至少有一人譯出，即求 $P(A\cup B)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

$=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}$

$=\frac{8}{15}-\frac{1}{15}=\frac{7}{15}$