

## 第3章 機率

### 3-1 樣本空間與事件

#### 重點一 樣本空間

##### 例題 1

連續投擲一公正骰子兩次，則：

(1) 樣本空間  $S$  為\_\_\_\_\_。(4分)

(2) 共有\_\_\_\_\_個樣本點。(4分)

解 (1) 以  $(a, b)$  表示第一次擲出  $a$  點，第二次擲出  $b$  點，則樣本空間

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$

(2) 共  $6^2 = 36$  個樣本點

##### 例題 2

甲、乙、丙、丁四人要以抽籤決定代表，試回答下列各題：

(1) 抽籤決定一人為代表之樣本空間  $S$  為\_\_\_\_\_，共有\_\_\_\_\_個樣本點。(6分)

(2) 抽籤決定兩人為代表之樣本空間  $S$  為\_\_\_\_\_，共有\_\_\_\_\_個樣本點。(6分)

解 (1)  $S = \{\text{甲}, \text{乙}, \text{丙}, \text{丁}\}$ ，

$$\text{共 } C_1^4 = 4 \text{ 個樣本點}$$

(2)  $S = \{\text{甲乙}, \text{甲丙}, \text{甲丁}, \text{乙丙}, \text{乙丁}, \text{丙丁}\}$ ，

$$\text{共 } C_2^4 = 6 \text{ 個樣本點}$$

##### 例題 3

一盒中有紅、白、黑三色球各一，試驗過程是由盒中取出一球，看清楚顏色後放回，再從中取出一球，則：

(1) 此次試驗的樣本空間為\_\_\_\_\_。(4分)

(2) 共有\_\_\_\_\_個樣本點。(4分)

解 (1) 以紅、白、黑分別表紅球、白球、黑球

$$\text{則樣本空間 } S = \{(\text{紅}, \text{紅}), (\text{紅}, \text{白}), (\text{紅}, \text{黑}), (\text{白}, \text{紅}), (\text{白}, \text{白}), (\text{白}, \text{黑}), (\text{黑}, \text{紅}), (\text{黑}, \text{白}), (\text{黑}, \text{黑})\}$$

(2) 共  $3^2 = 9$  個樣本點

##### 例題 4

設袋中有 10 顆球，其上均標有號碼 1 號、2 號、3 號、4 號、5 號各有兩顆，今自袋中任取兩顆球（不考慮順序），則：

(1) 樣本空間  $S$  為\_\_\_\_\_。(4分)

(2) 共有\_\_\_\_\_個樣本點。(4分)

解 (1)  $S = \{11, 12, 13, 14, 15, 22, 23, 24, 25, 33, 34, 35, 44, 45, 55\}$

這相當於“從 1、2、3、4、5 這五種不同的物品中選出 2 個的重複組合”，

$$(2) \text{ 共 } C_2^{5+2-1} = C_2^6 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15 \text{ 個樣本點}$$

## 重點二 事件

## 例題 5

設  $S$  表投擲一公正骰子的樣本空間， $A$  表出現偶數點的事件， $B$  表不超過 3 的事件，則：

- (1) 樣本空間  $S$  為\_\_\_\_\_。(2分)
- (2) 共有\_\_\_\_\_個事件。(2分)
- (3)  $A$  事件為\_\_\_\_\_。(2分)
- (4)  $B$  事件為\_\_\_\_\_。(2分)
- (5)  $A$  與  $B$  的和事件為\_\_\_\_\_。(2分)
- (6)  $A$  與  $B$  的積事件為\_\_\_\_\_。(2分)
- (7)  $A, B$  是否互斥？答：\_\_\_\_\_。(2分)

解 (1)  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$   
 (2) 共有  $2^6 = 64$  個事件  
 (3)  $A = \{2, 4, 6\}$   
 (4)  $B = \{1, 2, 3\}$   
 (5)  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$   
 (6)  $A \cap B = \{2\}$   
 (7)  $\because A \cap B \neq \emptyset \therefore A, B$  沒有互斥

## 例題 6

擲一顆公正的骰子兩次，設  $A$  表第一次出現偶數點的事件， $B$  表至少有一次出現 3 點的事件， $C$  表點數和大於 5 且小於 7 的事件，則：

- (1) 事件  $A$  為\_\_\_\_\_。(2分)
- (2) 事件  $B$  為\_\_\_\_\_。(2分)
- (3) 事件  $C$  為\_\_\_\_\_。(2分)
- (4)  $A$  與  $B$  的積事件為\_\_\_\_\_。(2分)
- (5)  $B$  與  $C$  的積事件為\_\_\_\_\_。(2分)

解 (1)  $A = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$   
 (2)  $B = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$   
 (3)  $C = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$   
 (4)  $A$  與  $B$  的積事件為  $A \cap B = \{(2, 3), (4, 3), (6, 3)\}$   
 (5)  $B$  與  $C$  的積事件為  $B \cap C = \{(3, 3)\}$

## 例題 7

丟一枚均勻硬幣三次，依次觀察出現正面 ( $H$ )、反面 ( $T$ ) 的情形，設  $A$  表示三次均出現同一面的事件， $B$  表示至少出現兩次反面的事件， $C$  表示恰有一次正面的事件，則：

- (1) 樣本空間  $S$  為\_\_\_\_\_。(2分)
- (2) 事件  $A$  為\_\_\_\_\_。(2分)
- (3) 事件  $B$  為\_\_\_\_\_。(2分)
- (4) 事件  $C$  為\_\_\_\_\_。(2分)
- (5)  $A$  的餘事件為\_\_\_\_\_。(2分)
- (6)  $A$  與  $B$  的和事件為\_\_\_\_\_。(2分)
- (7)  $A$  和  $C$  的積事件為\_\_\_\_\_。(2分)

(8)  $A$  和  $C$  是否互斥? 答: \_\_\_\_\_。

解 (1)  $S = \{(H, H, H), (H, H, T), (H, T, H), (H, T, T), (T, H, H), (T, H, T), (T, T, H), (T, T, T)\}$

(2)  $A = \{(H, H, H), (T, T, T)\}$

(3)  $B = \{(H, T, T), (T, H, T), (T, T, H), (T, T, T)\}$

(4)  $C = \{(H, T, T), (T, H, T), (T, T, H)\}$

(5)  $A' = \{(H, H, T), (H, T, H), (H, T, T), (T, H, H), (T, H, T), (T, T, H)\}$

(6)  $A \cup B = \{(H, H, H), (H, T, T), (T, H, T), (T, T, H), (T, T, T)\}$

(7)  $A \cap C = \emptyset$

(8)  $\because A \cap C = \emptyset \therefore A, C$  互斥

### 例題 8

設樣本空間  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ , 則  $S$  中:

(1) 所有的事件共有 \_\_\_\_\_ 個。(3 分)

(2) 恰含有兩個樣本點的事件有 \_\_\_\_\_ 個。(3 分)

(3) 至少含有四個樣本點的事件有 \_\_\_\_\_ 個。(3 分)

解 (1)  $2^7 = 128$  (個)

(2)  $C_2^7 = \frac{7 \times 6}{2} = 21$  (個)

(3)  $C_4^7 + C_5^7 + C_6^7 + C_7^7$   
 $= 35 + 21 + 7 + 1$   
 $= 64$  (個)

### 例題 9

設樣本空間  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 事件  $A = \{1, 2\}$ , 試求:

(1)  $S$  共有 \_\_\_\_\_ 個不同的事件。(3 分)

(2) 列出與  $A$  互斥的事件。(3 分)

解 (1)  $n(S) = 5$

故  $S$  的事件共有  $2^5 = 32$  (個)

(2) 與  $A$  互斥的事件有  $\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{3, 4, 5\}$ , 共 8 個

### 例題 10

依序擲 5 個公正的骰子, 設:

(1)  $A$  代表骰子點數皆相異的事件 (如 1, 3, 5, 4, 6), 則  $n(A) =$  \_\_\_\_\_。(3 分)

(2)  $B$  代表骰子點數恰成一對的事件 (如 3, 3, 5, 4, 6), 則  $n(B) =$  \_\_\_\_\_。(3 分)

(3)  $C$  代表骰子點數恰成兩對的事件 (如 2, 2, 4, 4, 1), 則  $n(C) =$  \_\_\_\_\_。(3 分)

解 (1)  $n(A) = P_5^6 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 720$

(2)  $n(B) = C_1^6 C_3^5 \times \frac{5!}{2!1!1!1!} = 3600$

(3)  $n(C) = C_2^6 C_1^4 \times \frac{5!}{2!2!1!} = 1800$