2-2　排　列

重點一　排列

例題 1

試計算下列各式之值：

(1) $P_2^5+P_3^7=$______。（5 分）

(2) 若 $4P_3^n=5P_3^{n-1}$，則 $n=$______。（5 分）

解　(1) $P_2^5+P_3^7=5\times4+7\times6\times5=230$

(2) $4P_3^n=5P_3^{n-1}$

⇨ $4\times n(n-1)(n-2)=5\times(n-1)(n-2)(n-3)$

⇨ $4n=5(n-3)$

⇨ $4n=5n-15$

⇨ $n=15$

例題 2

(1) 有 9 個小朋友要入座排成一列的 4 張椅子，只有 4 人可以入座，則入座的方式有______種。（5 分）

(2) 把 3 個轉學生分配到現有的 12 個班上，限制每班最多分配 1 個，共有______種分配方式。（5 分）

解　(1) $P_4^9=9\times8\times7\times6=3024$（種）

(2) $P_3^{12}=12\times11\times10=1320$（種）

例題 3

某桌球隊要從 10 位選手中派出 5 名，分別參加五場單打友誼賽，10 名選手中近況特佳的有 3 位，教練決定任意安排他們分別在第一、三、五場出賽，另外兩場則由其餘選手任意選出排定，則此球隊出場比賽的名單順序一共有______種。（10 分）

解　先排第一、三、五場，

再從剩餘的 7 位選手挑 2 名排第二、四場比賽

$3!\times P_2^7=252$（種）

例題 4

由 0，1，2，3，4，5，6 等七個數字，取出不重複的三個數字作成三位數，則：

(1) 此種三位數共有______個。（5 分）

(2) 承(1)，其中為偶數者有______個。（5 分）

解　(1) $6\times P_2^6=180$（個）

(2) 個位數字為 0 者，有 $P_2^6=30$（個）

個位數字為 2，4，6 三者之一

有 $3\times5\times5=75$（個）

∴共有 $30+75=105$（個）

例題 5

甲、乙、丙、丁、戊等五人排成一列，

(1) 甲不排首的方法數有______種。（3 分）

(2) 甲不排首、乙必排末的方法數有______種。（3 分）

(3) 甲不排首、乙不排末的方法數有______種。（3 分）

解　(1) $5!-4!=96$（種）

(2) $4!-3!=18$（種）

(3) $5!-2\times4!+3!=78$（種）

例題 6

將“庭院深深深幾許”七個字全取排成一列，則：

(1) 任意排列之方法有______種。（3 分）

(2) 三個“深”字完全連在一起的排法有______種。（3 分）

(3) 三個“深”字不完全連在一起的排法有______種。（3 分）

(4) 三個“深”字完全分開的排法有______種。（3 分）

解　(1) $\dfrac{7!}{3!}=840$（種）

(2) 將三個“深”字綁起來視為一字，直線排列數為 5!

鬆綁時　∵三字相同　∴只有一種方法

故 $5!\times1=120$（種）

(3)（全部）－（完全連在一起）

$=\dfrac{7!}{3!}-5!=720$（種）

(4) 先排“庭、院、幾、許”四字，有 4!種排法

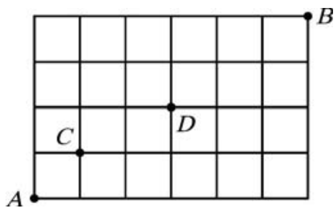
然後在 5 個空隙中找 3 個插入“深”字，

有 $\dfrac{P_3^5}{3!}$ 種排法

故排法有 $4!\times\dfrac{P_3^5}{3!}=24\times10=240$（種）

例題 7

如右圖，有一棋盤形街道，縱街有 7 條，橫街有 5 條，某人由 A 走捷徑到 B，則：



(1) 共有______種不同走法。（3 分）

(2) 必須經過 D 點的有______種走法。（3 分）

(3) 同時經過 C，D 兩點的有______種走法。（3 分）

解　(1) $\dfrac{(6+4)!}{6!4!}=\dfrac{10!}{6!4!}=\dfrac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$（種）

(2) $\dfrac{(3+2)!}{3!2!}\times\dfrac{(3+2)!}{3!2!}$

$=\dfrac{5\times4}{2\times1}\times\dfrac{5\times4}{2\times1}=100$（種）

(3) $\dfrac{(1+1)!}{1!1!}\times\dfrac{(2+1)!}{2!1!}\times\dfrac{(3+2)!}{3!2!}$

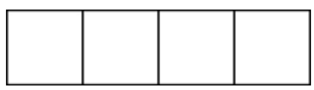
$=\dfrac{2!}{1!1!}\times\dfrac{3!}{2!1!}\times\dfrac{5!}{3!2!}$

$=2\times3\times10=60$（種）

重點二　重複排列

例題 8

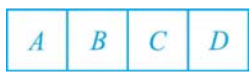
若以 6 種顏色塗在右圖的 4 個正方形，則：



(1) 4 個正方形皆為不同顏色的塗法有______種。（4 分）

(2) 相鄰的正方形不得塗相同顏色的塗法有______種。（4 分）

解　依 $A\to B\to C\to D$ 之順序塗



(1) $6\times5\times4\times3=360$（種）

(2) $6\times5\times5\times5=750$（種）

例題 9

渡船 3 艘，每艘可載 6 人，則：

(1) 5 人過渡，可安全過渡的方法數有______種。（3 分）

(2) 6 人過渡，可安全過渡的方法數有______種。（3 分）

(3) 7 人過渡，可安全過渡的方法數有______種。（3 分）

(4) 8 人過渡，可安全過渡的方法數有______種。（3 分）

解　(1) $3^5=243$（種）

(2) $3^6=729$（種）

(3) $3^7-3=2187-3=2184$（種）

(4) $3^8-3-8\times P_2^3=6561-3-48=6510$（種）

例題 10

5 件不同之玩具分給甲、乙、丙三人，則：

(1) 分法有______種。（2 分）

(2) 甲沒有得到玩具的分法有______種。（2 分）

(3) 甲至少得一件玩具的分法有______種。（2 分）

(4) 甲恰得一件玩具的分法有______種。（2 分）

(5) 每人至少得一件玩具的分法有______種。（2 分）

解　(1) $3^5=243$（種）

(2) $2^5=32$（種）

(3) $3^5-2^5=243-32=211$（種）

(4) $5\times2^4=80$（種）

(5) $3^5-3\times2^5+3\times1^5=150$（種）