第 4 章　綜合演練

基礎題

1. 某班春季旅行希望遊覽日數如下表：

希望遊覽日數（日）	1	2	3	4	5	6	合計
次　數（人）	2	x	14	4	y	2	50

設該班遊覽日的算術平均數是 2.8 日，則：
(1)數對（x , y）＝______。（4 分）
(2)中位數為______日。（4 分）
(3)眾數為______日。（4 分）

解　(1) 由題意知 $\begin{cases} 2+x+14+4+y+2=50 \\ \dfrac{1\times2+2\times x+3\times14+4\times4+5\times y+6\times2}{50}=2.8 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x+y=28 \\ 2x+5y=68 \end{cases}$，解之得 $x=24$，$y=4$

即數對（x , y）＝（24 , 4）

(2) ∵遊客有 50 人
⇨中位數即第 25 位，第 26 位的算術平均數，而 2＋24＝26
∴中位數為 2 日

(3) 2 日出現的次數最多，共有 24 次　∴眾數為 2 日

2. 某班 40 人參加考試，其平均分數為 62 分，標準差 3 分，但阿猜因考試作弊，該生原分數 80 分應更正為 0 分，試問此班之
(1)真正平均分數為______分。（4 分）
(2)真正標準差為______分。（四捨五入取到小數點後第二位）（4 分）

解　(1) $\mu_{真}=\dfrac{40\times62-80}{40}=60$（分）

(2) $\because 3^2=\dfrac{1}{40}\sum_{i=1}^{40}x_i^2-62^2$

$\therefore \sum_{i=1}^{40}x_i^2=40\times(3^2+62^2)=40\times3853=154120$

$\therefore \sigma_{真}=\sqrt{\dfrac{1}{40}(154120-80^2)-60^2}$

$=\sqrt{3693-3600}$

$=\sqrt{93}\approx9.64$（分）

3. 設變量 x 的 $\mu_x=16$，$\sigma_x=4$，若 $x=4y-3$，則變量 y 的
(1)μ_y＝________。（4 分）　　(2)σ_y＝________。（4 分）

解　$\because x=4_y-3 \Rightarrow y=\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{3}{4}$

(1) $\mu_y=\dfrac{1}{4}\mu_x+\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}\times16+\dfrac{3}{4}=\dfrac{19}{4}$

(2) $\sigma_y=\dfrac{1}{4}\sigma_x=\dfrac{1}{4}\times4=1$

4. 若函數 $f(x)=\frac{1}{5}[(x-1)^2+(x-2)^2+(x-3)^2+(x-6)^2+(x-8)^2]$ 在 $x=$______時，$f(x)$ 有最小值為______。(10 分)

解　$f(x)=\frac{1}{5}[(x-1)^2+(x-2)^2+(x-3)^2+(x-6)^2+(x-8)^2]$

$=\frac{1}{5}(5x^2-40x+114)$

$=x^2-8x+\frac{114}{5}=(x-4)^2+\frac{34}{5}$

故當 $x=4$ 時，$f(x)$ 有最小值 $\frac{34}{5}$

〈另解〉

這相當於計算 1，2，3，6，8 的算術平均數與變異數

其算術平均數為 $\frac{1}{5}(1+2+3+6+8)=\frac{20}{5}=4$

變異數為 $\frac{1}{5}[(1-4)^2+(2-4)^2+(3-4)^2+(6-4)^2+(8-4)^2]$

$=\frac{1}{5}\times(9+4+1+4+16)=\frac{34}{5}$

故當 $x=4$ 時，$f(x)$ 有最小值 $\frac{34}{5}$

5. 資料 x_1，x_2，x_3，……，x_n 的算術平均數以 μ_x 表示，標準差記為 σ_x，Me 表中位數，取 $y_i=3x_i+1$（$i=1$，2，3，……，n），記其平均數為 μ_y，標準差為 σ_y，Me' 為中位數，則下列何者恆正確？(10 分)

(A) $\mu_y>\mu_x$　(B) $Me'=3Me+1$　(C) $\sigma_y=3\sigma_x$　(D) $\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_y)=0$。

解　(A)×：若 $x_i<0$，$i=1$，2，3，……，n 時，$\mu_y<\mu_x$

(B)○：平均數（ 中心趨勢） 皆變為 3 倍再加 1　$\therefore Me'=3Me+1$

(C)○：標準差只與伸縮量有關，而與平移量無關　$\therefore \sigma_y=3\sigma_x$

(D)○：$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu_y)=\sum_{i=1}^{n}y_i-n\mu_y=n\mu_y-n\mu_y=0$

故選(B)(C)(D)

6. 已知 6 位同學的體重數據經標準化後為 -0.6，1，-0.8，-1.2，0，1.6，若已知原來體重的算術平均數為 54 公斤，標準差為 5 公斤，則原來 6 位同學的體重為______公斤。(8 分)

解　體重的標準化數據為 -0.6，1，-0.8，-1.2，0，1.6

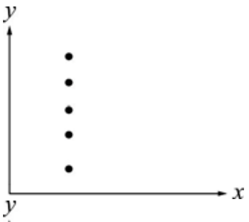
乘以標準差 5 後得 -3，5，-4，-6，0，8

再加上算術平均數 54 後得 51，59，50，48，54，62

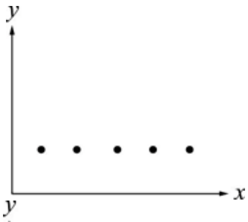
故原來 6 位同學的體重為 51，59，50，48，54，62（公斤）

7. 下列五個散佈圖中，何者表兩變量 x，y 的相關係數是 0？(8 分)

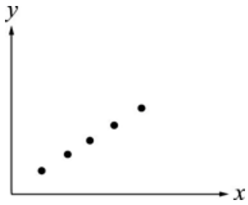
(A)



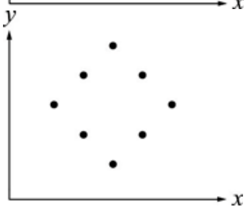
(B)



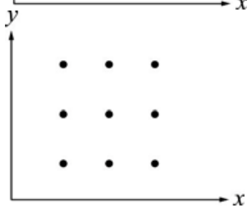
(C)



(D)



(E)



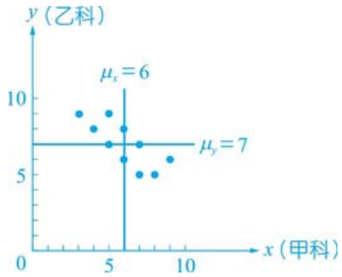
解　(C)為直線相關，其他相關係數皆 0
故選(A)(B)(D)(E)

8. 已知十位學生的成績如下：

學生代號	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	總計
甲科測驗	3	4	8	9	5	6	7	7	6	5	60
乙科測驗	9	8	5	6	7	6	5	7	8	9	70

(1)試作出其散佈圖。（5 分）
(2)甲、乙兩科的相關係數為________。（四捨五入取到小數點後第二位）（5 分）

解　(1)



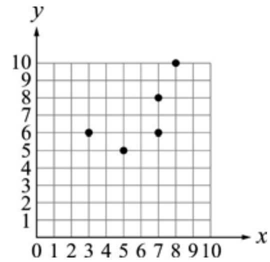
(2)

	甲科測驗 x_i	乙科測驗 y_i	$x_i-\mu_x$	$y_i-\mu_y$	$(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)$	$(x_i-\mu_x)^2$	$(y_i-\mu_y)^2$
	3	9	-3	2	-6	9	4
	4	8	-2	1	-2	4	1
	8	5	2	-2	-4	4	4
	9	6	3	-1	-3	9	1
	5	7	-1	0	0	1	0
	6	6	0	-1	0	0	1
	7	5	1	-2	-2	1	4
	7	7	1	0	0	1	0
	6	8	0	1	0	0	1
	5	9	-1	2	-2	1	4
合計	60	70			-19	30	20

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\mu_x)^2\cdot\sum_{i=1}^{10}(y_i-\mu_y)^2}}=\frac{-19}{\sqrt{30\times 20}}\approx-0.78$$

進階題

1. 五個學生參加一項包含數學與英文之能力測驗（每科皆為滿分十分）得其成績之散佈圖如右（x 表數學成績，y 表英文成績），試求：



(1)數學之算術平均數 μ_x＝______，標準差 σ_x＝______。（四捨五入取到小數點後第二位）（8 分）

(2)x，y 之相關係數為______。（4 分）

(3)y 對 x 之迴歸直線為______。（以 $y=a+bx$ 之形式表示）（4 分）

解　(1) 由題圖知 x，y 之對應關係如下：

x	3	5	7	7	8
y	6	5	6	8	10

可得 $\mu_x=\frac{1}{5}(3+5+7+7+8)=6$

$\mu_y=\frac{1}{5}(6+5+6+8+10)=7$

	x_i	y_i	$x_i-\mu_x$	$y_i-\mu_y$	$(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)$	$(x_i-\mu_x)^2$	$(y_i-\mu_y)^2$
	3	6	-3	-1	3	9	1
	5	5	-1	-2	2	1	4
	7	6	1	-1	-1	1	1
	7	8	1	1	1	1	1
	8	10	2	3	6	4	9
合計	30	35			11	16	16

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(x_i-\mu_x)^2}=\sqrt{\frac{1}{5}(9+1+1+1+4)}=\sqrt{\frac{16}{5}}=\sqrt{3.2}\approx 1.79$$

(2) 相關係數 $r=\frac{11}{\sqrt{16\times 16}}=\frac{11}{16}=0.6875$

(3) 設迴歸直線 L：$y=a+bx$，則

$$b=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\mu_x)(y_i-\mu_y)}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\mu_x)^2}=\frac{11}{16}$$

$$a=\mu_y-b\mu_x=7-\frac{11}{16}\times 6=\frac{23}{8}$$

∴迴歸直線方程式為 $y=\frac{23}{8}+\frac{11}{16}x$

2. 設 n 為自然數，則數值資料 1，2，3，……，n 的

(1)算術平均數 μ_x＝________。（5 分）

(2)標準差 σ＝________。（5 分）

解　(1) $\mu_x=\frac{1}{n}(1+2+\cdots\cdots+n)=\frac{n+1}{2}$

(2) $\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\mu_x^2$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{n}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{(n+1)^2}{4}$$

$$=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{(n+1)^2}{4}$$

$$=\frac{(n+1)(4n+2-3n-3)}{12}$$

$$=\frac{(n+1)(n-1)}{12}$$

∴標準差 $\sigma=\sqrt{\frac{(n+1)(n-1)}{12}}$