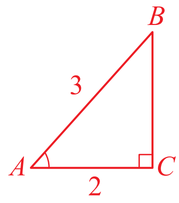
第1章　三　　角

1-1　直角三角形的邊角關係

1.　設 $\angle A$ 為一個銳角， $\cos A=\frac{2}{3}$， 求 $\sin A$ 和 $\tan A$ 的值．

解　作一直角 $\triangle ABC$， 使 $\angle A$ 的鄰邊 $\overline{AC}=2$， 斜邊 $\overline{AB}=3$， 如圖所示．



$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=3^2-2^2=5$，

故 $\overline{BC}=\sqrt{5}$．

得 $\sin A=\frac{\sqrt{5}}{3}$， $\tan A=\frac{\sqrt{5}}{2}$．

2.　求下列各式的值：

(1) $\sin^2 45°+\tan 30°\sin 60°$.　　(2) $\frac{\sin 60°-\tan 45°}{\tan 60°-2\tan 45°}$．

解　(1) $\sin^2 45°+\tan 30°\sin 60°=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$．

(2) $\frac{\sin 60°-\tan 45°}{\tan 60°-2\tan 45°}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-1}{\sqrt{3}-2}=\frac{\frac{\sqrt{3}-2}{2}}{\sqrt{3}-2}=\frac{1}{2}$．

3.　有一直角三角形，斜邊長為 1，一內角 $20°$，下列何者等於斜邊上的高長？

(1) $\sin 20°\cos 20°$

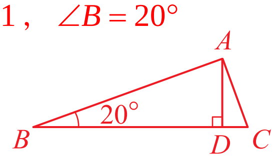
(2) $\sin^2 20°$

(3) $\cos^2 20°$

(4) $\sin 20°\tan 20°$

(5) $\cos 20°\tan 20°$．

解　如圖， 作三角形 ABC， 使 $\triangle ABC$ 中， $\angle A=90°$， $\overline{BC}=1$， $\angle B=20°$



$\Rightarrow$ $\overline{AB}=\cos 20°$，

$\triangle ABD$ 中， $\overline{AD}=\overline{AB}\times\sin 20°=\cos 20°\sin 20°$，

故選(1).

4. 設 θ 為銳角且滿足方程式 $2\cos^2\theta + 3\cos\theta = 2$，求 $\tan\theta$.

解 $2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 2 = 0$

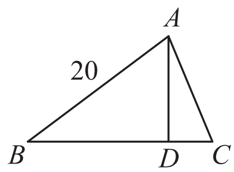
$\Rightarrow (2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 2) = 0$

$\Rightarrow \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ 或 -2（-2 不合）

$\Rightarrow \theta = 60^\circ$.

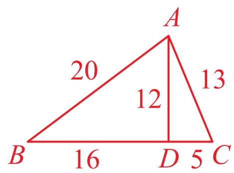
故 $\tan\theta = \sqrt{3}$.

5. 如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AD} \perp \overline{BC}$，已知 $\overline{AB} = 20$，$\sin B = \dfrac{3}{5}$，$\sin C = \dfrac{12}{13}$，求 $\overline{BC}$.



解 $\triangle ABD$ 中，$\overline{AD} = \overline{AB} \times \sin B = 20 \times \dfrac{3}{5} = 12$,

$\overline{BD} = \overline{AB} \times \cos B = 20 \times \dfrac{4}{5} = 16$,



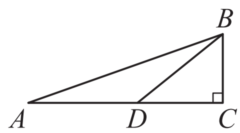
$\triangle ACD$ 中，$\overline{AC} \times \sin C = \overline{AD}$

$\Rightarrow \overline{AC} \times \dfrac{12}{13} = 12 \quad \Rightarrow \quad \overline{AC} = 13$,

$\overline{DC} = \overline{AC}\cos C = 5$,

所求 $= \overline{BD} + \overline{DC} = 16 + 5 = 21$.

6. 如圖，$\overline{BC} \perp \overline{AC}$，$\overline{AD} = \overline{BD}$，若 $\sin(\angle BDC) = \dfrac{1}{3}$，求 $\tan A$.



解 由 $\sin(\angle BDC) = \dfrac{1}{3}$，令 $\overline{BC} = 1$，$\overline{BD} = 3$，則 $\overline{CD} = 2\sqrt{2}$.

又 $\overline{AD} = \overline{BD} = 3$，故 $\tan A = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \dfrac{1}{3 + 2\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2}$.

7. 化簡 $(1-\tan^4\theta)\cdot\cos^2\theta+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$ ．

解 $(1-\tan^4\theta)\cdot\cos^2\theta+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$

$=(1-\tan^2\theta)(1+\tan^2\theta)\cos^2\theta+\tan^2\theta$

$=(1-\tan^2\theta)\left(1+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\right)\cos^2\theta+\tan^2\theta$

$=(1-\tan^2\theta)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+\tan^2\theta$

$=(1-\tan^2\theta)+\tan^2\theta$

$=1$ ．

8. 求 $\sin^2 25°+\sin^2 35°+\sin^2 55°+\sin^2 65°$ 的值．

解 $\sin^2 25°+\sin^2 35°+\sin^2 55°+\sin^2 65°$

$=\sin^2 25°+\sin^2 35°+\cos^2 35°+\cos^2 25°$

$=(\sin^2 25°+\cos^2 25°)+(\sin^2 35°+\cos^2 35°)$

$=1+1$

$=2$ ．

9. θ 為銳角，若 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，求 $\sin\theta\cos\theta$ ．

解 $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ $\Rightarrow$ $\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{5}{4}$

$\Rightarrow$ $1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{5}{4}$

$\Rightarrow$ $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{8}$ ．

10. 試證：$\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}-\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{4}{\tan\theta\sin\theta}$.

解 $\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}-\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{(1+\cos\theta)^2-(1-\cos\theta)^2}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}$

$$=\frac{4\cos\theta}{1-\cos^2\theta}=\frac{4\cos\theta}{\sin^2\theta}=4\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)=\frac{4}{\tan\theta\sin\theta}\ .$$

11. θ 為銳角，$\sin\theta+\sin^2\theta=1$，求 $\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{1-\sin\theta}$.

解 由 $\sin\theta+\sin^2\theta-1=0 \quad\Rightarrow\quad \sin\theta=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$（負不合）

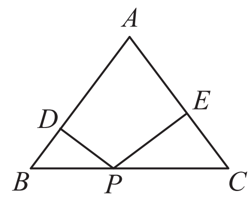
$$\frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1-\sin\theta}=\frac{2}{1-\sin^2\theta}$$

$=\dfrac{2}{\sin\theta}$（因為 $\sin\theta+\sin^2\theta=1$）

$$=\frac{4}{-1+\sqrt{5}}=\sqrt{5}+1\ .$$

12. 如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{BC}=10$，$\sin B=\dfrac{4}{5}$.

P 為 $\overline{BC}$ 上一點，$\overline{PD}\perp\overline{AB}$，$\overline{PE}\perp\overline{AC}$. 求 $\overline{PD}+\overline{PE}$.



解 設 $\overline{BP}=x$，則 $\overline{CP}=10-x$.

$\triangle BPD$ 中，$\overline{PD}=\overline{BP}\sin B=x\sin B$ ；

$\triangle CPE$ 中，$\overline{PE}=\overline{CP}\sin C=(10-x)\sin C$ ，

因為 $\overline{AB}=\overline{AC}$，所以 $\sin B=\sin C=\dfrac{4}{5}$.

故 $\overline{PD}+\overline{PE}=\dfrac{4}{5}x+\dfrac{4}{5}(10-x)=\dfrac{4}{5}\times 10=8$.