第3章　平面向量

3-4　面積與二階行列式

1.　求下列各行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 7 & 17 \\ 17 & 7 \end{vmatrix}$.　(2) $\begin{vmatrix} 13 & 26 \\ 24 & 32 \end{vmatrix}$.　(3) $\begin{vmatrix} 28 & 27 \\ 26 & 25 \end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix} 7 & 17 \\ 17 & 7 \end{vmatrix} = 7^2 - 17^2 = (7-17)(7+17) = -240$.

(2) $\begin{vmatrix} 13 & 26 \\ 24 & 32 \end{vmatrix} = 13 \times 8 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 104 \times (4-6) = -208$.

(3) $\begin{vmatrix} 28 & 27 \\ 26 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 26 & 25 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 26 & 25 \end{vmatrix} = 2(25-26) = -2$.

2.　利用克拉瑪公式，求下列方程組的解：

(1) $\begin{cases} 2x - 3y = 6 \\ 3x + 4y = -25 \end{cases}$.　(2) $\begin{cases} 3x + 5y = 4 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$.

解 (1)因為 $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 17$ ，$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -25 & 4 \end{vmatrix} = -51$ ，$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -25 \end{vmatrix} = -68$ ，所以

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-51}{17} = -3 ,\quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-68}{17} = -4 .$$

(2)因為 $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -13$ ，$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1$ ，$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11$ ，所以

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -\frac{1}{13} ,\quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-11}{-13} = \frac{11}{13} .$$

3. 選出值與行列式$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$的值相等之選項：

(1)$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$　(2)$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$　(3)$\begin{vmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{vmatrix}$　(4)$\begin{vmatrix} 1 & b \\ c & ad \end{vmatrix}$　(5)$\begin{vmatrix} a & b \\ kc & kd \end{vmatrix}$．

解 (1)$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$，因為行列互換，所以其值不變．

(2)$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$，因為兩列互換，所以其值變號．

(3)$\begin{vmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a+c-c & b+d-d \\ c & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$．

(4)$\begin{vmatrix} 1 & b \\ c & ad \end{vmatrix}=ad-bc=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$．

(5)$\begin{vmatrix} a & b \\ kc & kd \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$．

故選(1)(3)(4)．

4. 已知$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=5$，求$\begin{vmatrix} 3a+2b & 5a+4b \\ 3c+2d & 5c+4d \end{vmatrix}$的值．

解
$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 3a+2b & 5a+4b \\ 3c+2d & 5c+4d \end{vmatrix}&=\begin{vmatrix} 3a & 5a+4b \\ 3c & 5c+4d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2b & 5a+4b \\ 2d & 5c+4d \end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix} 3a & 4b \\ 3c & 4d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2b & 5a \\ 2d & 5c \end{vmatrix}\\&=3\times 4\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+2\times 5\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}\\&=12\times 5+10\times(-5)=10\end{aligned}$$
．

5. 已知方程組 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 恰有一組解 $x=3$, $y=1$，求方程組 $\begin{cases} 3b_1x-2a_1y=4c_1 \\ 3b_2x-2a_2y=4c_2 \end{cases}$ 的解．

解　設 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$，$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$，則

$$\frac{\Delta_x}{\Delta}=3, \frac{\Delta_y}{\Delta}=1.$$

因為

$$\Delta'=\begin{vmatrix} 3b_1 & -2a_1 \\ 3b_2 & -2a_2 \end{vmatrix}=3\times(-2)\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}=-6(-\Delta)=6\Delta,$$

$$\Delta_x'=\begin{vmatrix} 4c_1 & -2a_1 \\ 4c_2 & -2a_2 \end{vmatrix}=4\times(-2)\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}=-8(-\Delta_y)=8\Delta_y,$$

$$\Delta_y'=\begin{vmatrix} 3b_1 & 4c_1 \\ 3b_2 & 4c_2 \end{vmatrix}=3\times 4\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}=12(-\Delta_x)=-12\Delta_x,$$

所以所求方程組的解為

$$x=\frac{\Delta_x'}{\Delta'}=\frac{8\Delta_y}{6\Delta}=\frac{8}{6}\times 1=\frac{4}{3},$$

$$y=\frac{\Delta_y'}{\Delta'}=\frac{-12\Delta_x}{6\Delta}=\frac{-12}{6}\times 3=-6.$$

6. 大和尚與小和尚共有 100 人．一天早上他們總共吃了 100 個饅頭，只知大和尚 1 人吃 3 個饅頭，小和尚 3 人吃 1 個饅頭，問大和尚與小和尚各有多少人？

解　設大和尚 x 人，小和尚 y 人，由題意可列得

$$\begin{cases} x+y=100 \\ 3x+\dfrac{y}{3}=100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=100 & \cdots\cdots ① \\ 9x+y=300 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

由②－①得　$8x=200$　$\Rightarrow$　$x=25$，代回①得 $y=75$．

故大和尚 25 人，小和尚 75 人．

7. 已知方程組 $\begin{cases} kx+2y=4 \\ 6x+(k+1)y=k+5 \end{cases}$，

(1)若該方程組無解，則實數 k 的值為何？

(2)若該方程組有無限多組解，則實數 k 的值為何？

解 計算行列式 $\Delta, \Delta_x, \Delta_y$：

$$\Delta=\begin{vmatrix} k & 2 \\ 6 & k+1 \end{vmatrix}=k^2+k-12=(k-3)(k+4),$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ k+5 & k+1 \end{vmatrix}=4k+4-2k-10=2(k-3),$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} k & 4 \\ 6 & k+5 \end{vmatrix}=k^2+5k-24=(k-3)(k+8) .$$

(1)當 $k=-4$ 時，$\Delta=0$，代入原方程組，得

$$\begin{cases} -4x+2y=4 \\ 6x-3y=1 \end{cases} .$$

在坐標平面上這代表兩直線平行，故方程組無解．

(2)當 $k=3$ 時，$\Delta=0$，代入原方程組，得

$$\begin{cases} 3x+2y=4 \\ 6x+4y=8 \end{cases} .$$

在坐標平面上這代表兩直線重合，故方程組有無限多組解．

8. 已知坐標平面上三點 $A(-1,2)$，$B(2,4)$，$C(3,-2)$，求△ ABC 的面積．

解 因為 $\overrightarrow{AB}=(3,2)$，$\overrightarrow{AC}=(4,-4)$，且△ ABC 的面積等於以向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 為鄰邊之平行四邊形面積的一半，所以

$$\triangle ABC \text{ 的面積}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -4 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|-20|=10 .$$