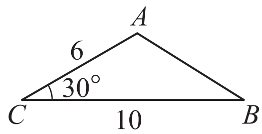
# 第1章　三　　角

## 1-3　正弦定理與餘弦定理

1.　在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=10,\ b=6$，且 $\angle C=30°$，求 $\triangle ABC$ 的面積．




解　利用面積公式 $\Delta=\dfrac{1}{2}ab\sin C$，

得 $\triangle ABC$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\times10\times6\times\sin30°=15$．

2.　在 $\triangle ABC$ 中，已知 $(b+c):(c+a):(a+b)=11:13:12$，求 $\sin A:\sin B:\sin C$．

解　因為 $(b+c):(c+a):(a+b)=11:13:12$，

可設 $b+c=11K$ ……①

$c+a=13K$ ……②

$a+b=12K$ ……③

由①+②+③得 $2(a+b+c)=36K$

$\Rightarrow\ a+b+c=18K$ ……④

將④－①得 $a=7K$，

④－②得 $b=5K$，

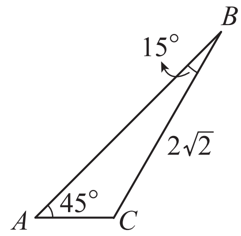
④－③得 $c=6K$，

利用正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，

得 $\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=7K:5K:6K=7:5:6$．

3. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A=45°$，$\angle B=15°$，$\overline{BC}=2\sqrt{2}$，求 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 及 $\triangle ABC$ 外接圓半徑．

（已知 $\sin 15°=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$）




解　$\angle C=180°-\angle A-\angle B=120°$．

利用正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$，

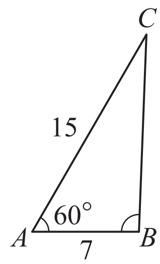
得 $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin 45°}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin 15°}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin 120°}=2R$，

即 $\overline{AC}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin 45°}\times\sin 15°=\dfrac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，

$\overline{AB}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin 45°}\times\sin 120°=\dfrac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，

又由 $2R=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sin 45°}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=4$，得 $\triangle ABC$ 外接圓半徑 $R=2$．

4. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB}=7$，$\overline{AC}=15$，$\angle A=60°$，求出 $\overline{BC}$ 的長度．




解　利用餘弦定理 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\overline{AB}\times\overline{AC}\cos A$，

得 $\overline{BC}^2=7^2+15^2-2\times7\times15\times\cos 60°$

$=49+225-105=169$，

即 $\overline{BC}=13$．

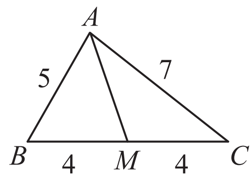
5. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=\sqrt{19}$，$b=3$，$c=5$，求 $\angle A$ 的角度．

解　利用餘弦定理，

得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{3^2+5^2-\left(\sqrt{19}\right)^2}{2\times3\times5}=\dfrac{1}{2}$，

故 $\angle A=60°$．

6. 若在 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AM}$ 為 $\overline{BC}$ 邊上的中線，且已知 $\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=7$，$\overline{BC}=8$，求中線 $\overline{AM}$ 的長度．




解 依題意，如圖所示：

在 $\triangle ABM$ 中，由餘弦定理 $\cos B=\dfrac{5^2+4^2-\overline{AM}^2}{2\times5\times4}$ ⋯⋯①

在 $\triangle ABC$ 中，由餘弦定理 $\cos B=\dfrac{5^2+8^2-7^2}{2\times5\times8}=\dfrac{1}{2}$ ⋯⋯②

由上述①及②可得 $\dfrac{41-\overline{AM}^2}{40}=\dfrac{1}{2}$，即 $\overline{AM}^2=21$，

故 $\overline{AM}=\sqrt{21}$．

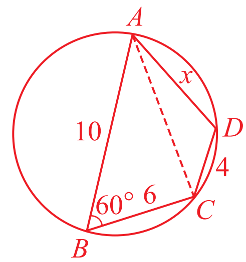
7. $\triangle ABC$ 中，已知 $a=5$，$b=6$，$c=7$，求 $\triangle ABC$ 的面積．

解 因為 $s=\dfrac{5+6+7}{2}=9$，所以由海龍公式，

得 $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}$

$=\sqrt{9\times4\times3\times2}=6\sqrt{6}$．

8. 四邊形 $ABCD$ 內接於一圓，若 $\angle ABC=60^\circ$，$\overline{AB}=10$，$\overline{BC}=6$，$\overline{CD}=4$，求 $\overline{AD}$．




解 連接 $\overline{AC}$，且設 $\overline{AD}=x$．

因為 $ABCD$ 為圓內接四邊形，

$\angle ADC=180^\circ-\angle ABC=120^\circ$．

在 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AC}^2=10^2+6^2-2\cdot10\cdot6\cdot\cos60^\circ=76$，

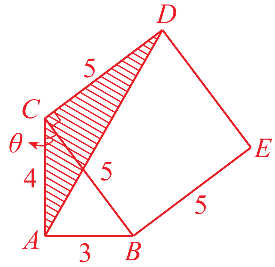
在 $\triangle ACD$ 中，$\overline{AC}^2=4^2+x^2-2\cdot4\cdot x\cdot\cos120^\circ=76$，

得 $x^2+4x-60=0 \Rightarrow x=6$ 或 $-10$（負不合），

故 $\overline{AD}=6$．

9. 設 $\triangle ABC$ 為一直角三角形，$\square BCDE$ 是以 $\overline{BC}$ 為一邊向外作出的正方形．若 $\overline{BC}=5$， $\overline{CA}=4$， $\overline{AB}=3$，試求

(1) $\cos(\angle ACD)$．　　(2) $\triangle ACD$ 的面積．




解 (1)設 $\angle ACB=\theta$，

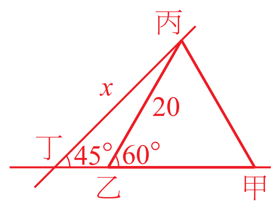
$$\cos(\angle ACD)=\cos(90^\circ+\theta)=-\sin\theta=-\frac{3}{5}.$$

(2) $\sin(\angle ACD)=\dfrac{4}{5}$，

$$\Delta ACD=\frac{1}{2}\times5\times4\times\frac{4}{5}=8\text{（平方單位）}.$$

10. 假設甲、乙、丙三鎮兩兩之間的距離皆為 20 公里．兩條筆直的公路交於丁鎮，其中之一通過甲、乙兩鎮而另一通過丙鎮．今在一比例精準的地圖上量得兩公路的夾角為 45°，則丙、丁兩鎮間的距離約為

(1) 24.5　(2) 25　(3) 25.5　(4) 26　(5) 26.5　公里．【98 學測】




解 如圖，設丙、丁間的距離為 $x$ 公里，

於△乙丙丁中，

由正弦定理：$\dfrac{x}{\sin120^\circ}=\dfrac{20}{\sin45^\circ}$

$$\Rightarrow\quad x=20\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}=10\sqrt{6}\approx24.5,$$

故選(1)．