

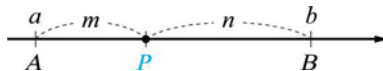
1-2 數線上的幾何

一、分點公式

設數線上點 A 與點 B 的坐標分別為 a 與 b ， m, n 為正數。

若 P 點在 \overline{AB} 上，且 $\overline{AP} : \overline{BP} = m : n$ ，

則 P 點的坐標為 $\frac{na+mb}{m+n}$ 。



二、絕對值

1. 定義： $|x| = \begin{cases} x, & \text{當 } x \geq 0, \\ -x, & \text{當 } x < 0. \end{cases}$

2. 幾何意義：

(1) $|x|$ 表數線上的點 x 到原點距離。

(2) $|x-y|$ 表數線上兩點 x, y 之間的距離。

3. 性質：

(1) x, k 是實數， $k > 0$ ，則 $|x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$ 。

(2) x, k 是實數， $k > 0$ ，則 $|x| \geq k \Leftrightarrow x \geq k$ 或 $x \leq -k$ 。

三、三角不等式

1. a, b 是實數， $|a+b| \leq |a| + |b|$ ；等號成立 $\Leftrightarrow ab \geq 0$ 。

2. a, b 是實數， $|a-b| \leq |a| + |b|$ ；等號成立 $\Leftrightarrow ab \leq 0$ 。

基礎題

I. 數線上兩點 $A(-3), B(7)$ 。

(1) 試求 \overline{AB} 之長。(3 分)

(2) 試求 \overline{AB} 的中點坐標。(3 分)

(3) 已知點 $P(x)$ 在 \overline{AB} 上，且 $\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 2$ ，試求 x 之值。(4 分)

解 (1)
 $|7 - (-3)| = 10$

(2) \overline{AB} 的中點坐標為 $\frac{7 + (-3)}{2} = 2$

(3) 由分點公式得 $x = \frac{2 \times (-3) + 3 \times 7}{3 + 2} = \frac{15}{5} = 3$

2. 解下列各不等式：

(1) $|x| \leq 3$ 。(3 分)

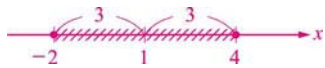
(2) $|x-1| \leq 3$ 。(3 分)

(3) $|x-1| \geq 2$ 。(4 分)

解 (1) $|x| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$

(2) 配合數線觀察

$$-3 \leq x-1 \leq 3 \Rightarrow -2 \leq x \leq 4$$



(3) 配合數線觀察

$$|x-1| \geq 2 \Rightarrow x-1 \geq 2 \text{ 或 } x-1 \leq -2, \text{ 得 } x \geq 3 \text{ 或 } x \leq -1$$



3. 滿足 $|a| + |b| = 3$ 的整數數對 (a, b) 有幾個？(10 分)

(A)5 個

(B)8 個

(C)10 個

(D)12 個

解

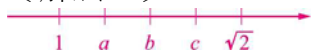
$ a $	$ b $	解個數
0	3	$1 \times 2 = 2$
3	0	$2 \times 1 = 2$
1	2	$2 \times 2 = 4$
2	1	$2 \times 2 = 4$

\therefore 共有 $2+2+4+4=12$ 個

故選(D)

4. 試比較 $\frac{3+\sqrt{2}}{4}$, $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1+3\sqrt{2}}{4}$ 三數的大小關係。(10 分)

解 [解法一]



如上圖， a 、 b 、 c 分別為 1 、 $\sqrt{2}$ 的第 1、2、3 個四等分點

$$\text{即 } a = \frac{3+\sqrt{2}}{4}, b = \frac{2+2\sqrt{2}}{4} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}, c = \frac{1+3\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{故 } a < b < c, \text{ 即 } \frac{3+\sqrt{2}}{4} < \frac{1+\sqrt{2}}{2} < \frac{1+3\sqrt{2}}{4}$$

[解法二]

$$\text{考慮 } \frac{3+\sqrt{2}}{4} - \frac{1+\sqrt{2}}{2} = \frac{3+\sqrt{2}}{4} - \frac{2+2\sqrt{2}}{4} = \frac{1-\sqrt{2}}{4} < 0$$

$$\frac{1+\sqrt{2}}{2} - \frac{1+3\sqrt{2}}{4} = \frac{2+2\sqrt{2}}{4} - \frac{1+3\sqrt{2}}{4} = \frac{1-\sqrt{2}}{4} < 0$$

$$\text{故 } \frac{3+\sqrt{2}}{4} < \frac{1+\sqrt{2}}{2} < \frac{1+3\sqrt{2}}{4}$$

進階題

5. 試解下列各方程式：

(1) $|2x-3|=5$ 。(5 分)

(2) $|x+1|=|x-3|$ 。(5 分)

解 (1) $2x-3=5$ 或 $2x-3=-5$

$2x=8$ 或 $2x=-2$

$x=4$ 或 $x=-1$

(2) $x+1=x-3$ (矛盾式) 或 $x+1=-(x-3)$

得 $2x-2=0$

即 $x=1$

6. 關於不等式 $|5-x| \leq k$ 的敘述，下列哪些選項正確？(10 分)

(A) 若 k 為正數，則 x 沒有最大值

(B) 若 k 為正數，則 x 沒有最小值

(C) 若 k 為負數，則 x 無解

(D) 若 $k=0$ ，則 x 無解

(E) 若 $k=\pi$ ，則 x 有 7 個整數解

解 (A)(B) $x: k > 0$ ， $|5-x| \leq k$ 的解為 $5-k \leq x \leq 5+k$

故 x 有最大值及最小值

(C) \bigcirc ：因為 $|5-x| > 0$ ，故 $|5-x| \leq k$ 無解

(D) $x: k=0$ ，則 $|5-x|=0$ ，故 $x=5$ 有解

(E) \bigcirc ： $|5-x| \leq \pi$ ，得 $5-\pi \leq x \leq 5+\pi$

故整數解有 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8，共 7 個

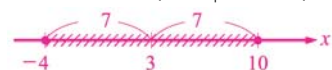
故選(C)(E)

7. 若將區域 $-4 \leq x \leq 10$ 表示成 $|x-a| \leq b$ ，試求數對 (a, b) 。(10 分)

解 先找出中心點 $\frac{-4+10}{2} = 3$

再找出中心至端點距離

$10-3=7$ ($= |3-(-4)|$)



所以 $-4 \leq x \leq 10$ 對應到不等式 $|x-3| \leq 7$

即 $a=3, b=7$

故數對 $(a, b) = (3, 7)$

8. 試解下列各不等式：

(1) $|2x-1| < x+4$ 。(5 分)

(2) $|x-1| \geq |x-3|$ 。(5 分)

解 (1) 分成 $2x-1 \geq 0$ 或 $2x-1 < 0$ 討論：

① 若 $2x-1 \geq 0$ 時，

$$2x-1 < x+4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x < 5 \end{cases}$$

② 若 $2x-1 < 0$ 時，

$$-(2x-1) < x+4 \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ 3x+3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x > -1 \end{cases}$$

綜合①、②，得 $-1 < x < 5$



(2) 將 x 分成① $x < 1$ ；② $1 \leq x \leq 3$ ；③ $x > 3$ 三種情形討論：

① $x < 1$ 時，

$$1-x \geq 3-x, \text{ 矛盾式}$$

② $1 \leq x \leq 3$ 時，

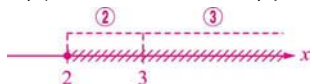
$$x-1 \geq 3-x \Leftrightarrow 2x \geq 4 \Leftrightarrow x \geq 2$$

$$\text{故 } 2 \leq x \leq 3$$

③ $x > 3$ 時， $x-1 \geq x-3$

$$\text{得 } -1 \geq -3 \text{ (恆成立), 故 } x > 3$$

綜合①、②、③，得 $x \geq 2$



9. 解不等式 $|x-2| + |x-6| \leq |2x-8|$ 。(10 分)

解 [解法一]

在數線上分段討論：

① $x \leq 2$ 時，

$$2-x+6-x \leq 8-2x$$

$$\Leftrightarrow 8-2x \leq 8-2x \text{ 恆成立}$$

所以，此時解為 $x \leq 2$

② $2 < x \leq 4$ 時，

$$x-2+6-x \leq 8-2x$$

$$\Leftrightarrow 4 \leq 8-2x \Leftrightarrow x \leq 2$$

所以，此時沒有解

③ $4 < x < 6$ 時，

$$x-2+6-x \leq 2x-8$$

$$\Leftrightarrow 4 \leq 2x-8 \Leftrightarrow x \geq 6$$

所以，此時沒有解

④ $x \geq 6$ 時，

$$x-2+x-6 \leq 2x-8$$

$$\Leftrightarrow 2x-8 \leq 2x-8 \text{ 恆成立}$$

所以，此時解為 $x \geq 6$

綜合①~④，得不等式的解為 $x \leq 2$ 或 $x \geq 6$

〔解法二〕

觀察 $(x-2) + (x-6) = 2x-8$

由不等式 $|a| + |b| \geq |a+b|$

只有當 a, b 同號時上式的等號才成立

因此， $|x-2| + |x-6| \geq |2x-8|$

所以，若原不等式成立，則

$$|x-2| + |x-6| = |2x-8|$$

得 $x-2 \geq 0, x-6 \geq 0$

或 $x-2 \leq 0, x-6 \leq 0$

因此，不等式的解為 $x \leq 2$ 或 $x \geq 6$

10. 郊區一筆直的路段設有水廠和瓦斯廠各一座，其坐標如下圖所示。因為管線鋪設的費用分攤，沿路居民水及瓦斯擬收取基本費用，其計算方式為：住戶到瓦斯廠距離的 3 倍加上住戶到水廠的距離為該住戶的基本費（單位：元）。試求該路段基本費不超過 18 元的區域範圍。（10 分）



解 若住戶的位置為 x ，則住戶到瓦斯廠距離為 $|x-4|$ ，到水廠距離為 $|x+2|$

故水電基本費為 $3|x-4| + |x+2| \leq 18$

故本題求解的範圍為 $3|x-4| + |x+2| \leq 18$

在數線上分段討論：

① $x < -2$ 時，

$$3(4-x) - (x+2) \leq 18 \Leftrightarrow 10-4x \leq 18 \Leftrightarrow 4x \geq -8 \Leftrightarrow x \geq -2$$

所以，此時沒有解

② $-2 \leq x \leq 4$ 時，

$$3(4-x) + (x+2) \leq 18 \Leftrightarrow 14-2x \leq 18 \Leftrightarrow 2x \geq -4 \Leftrightarrow x \geq -2$$

所以，此時解為 $-2 \leq x \leq 4$

③ $x > 4$ 時，

$$3(x-4) + (x+2) \leq 18 \Leftrightarrow 4x-10 \leq 18 \Leftrightarrow 4x \leq 28 \Leftrightarrow x \leq 7$$

所以，此時解為 $4 < x \leq 7$

綜合①、②、③，得不等式的解為 $-2 \leq x \leq 7$