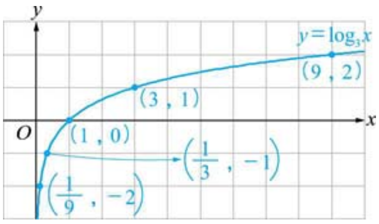
3-4　對數函數

重點一　對數函數的圖形與性質

例題 1

利用描點法描繪函數 $y=\log_3 x$ 的圖形。（4 分）

解



由

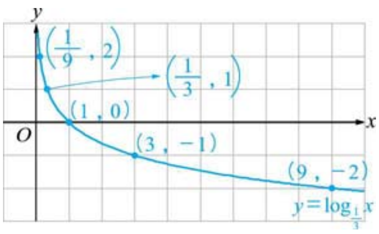
x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$y=\log_3 x$	-2	-1	0	1	2

將這些點用勻滑曲線連接起來，
就可以得到函數 $y=\log_3 x$ 的圖形

例題 2

利用描點法描繪函數 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 的圖形。（4 分）

解



由

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
$y=\log_{\frac{1}{3}} x$	2	1	0	-1	-2

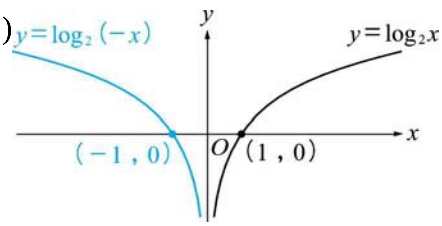
得 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 的圖形如上

例題 3

試利用 $y=\log_2 x$ 的圖形，描繪下列各圖形：

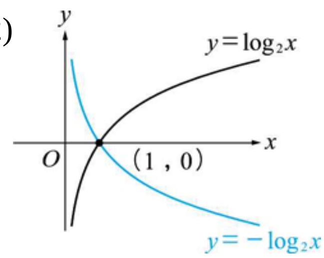
(1) $y=\log_2(-x)$。（5 分）　(2) $y=-\log_2 x$。（5 分）
(3) $y=\log_2|x|$。（5 分）　(4) $y=|\log_2 x|$。（5 分）
(5) $y=\log_2(x+3)$。（5 分）　(6) $y=\log_2(2x)$。（5 分）

解 (1)



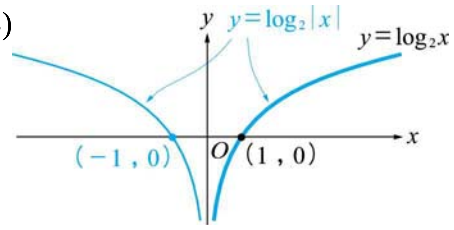
$y=\log_2(-x)$ 與 $y=\log_2 x$ 之圖形對稱於 y 軸

(2)



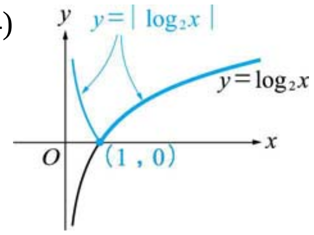
$y=-\log_2 x$ 與 $y=\log_2 x$ 之圖形對稱於 x 軸

(3)



$y=\log_2|x| \Rightarrow \begin{cases} \text{當} x>0 \text{時，} y=\log_2 x \\ \text{當} x<0 \text{時，} y=\log_2(-x) \end{cases}$

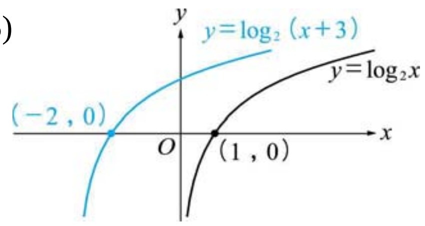
(4)



$y=|\log_2 x|$

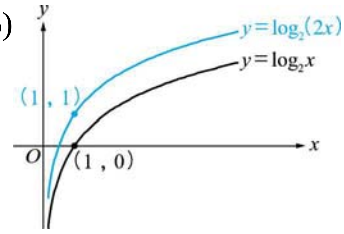
$\Rightarrow \begin{cases} \text{當} \log_2 x \geq 0\text{，亦即} x \geq 1 \text{時} \\ \Rightarrow y=\log_2 x \\ \text{當} \log_2 x<0\text{，亦即} x<x<1 \text{時} \\ \Rightarrow y=-\log_2 x \end{cases}$

(5)



將 $y=\log_2 x$ 之圖形向左平移 3 單位，
可得 $y=\log_2(x+3)$

(6)



將 $y=\log_2 x$ 之圖形向上平移 1 單位，
可得 $y=\log_2(2x)$

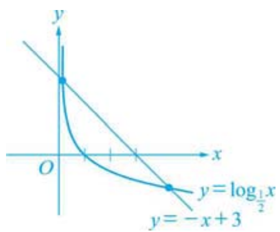
例題 4

試利用圖形說明方程式 $-x+3=\log_{\frac{1}{2}} x$ 有多少個實根？（4 分）

解　欲求 $-x+3=\log_{\frac{1}{2}} x$ 之實根數，即求

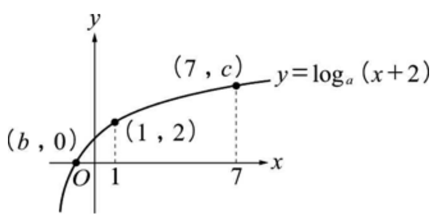
$\begin{cases} y=-x+3 \\ y=\log_{\frac{1}{2}} x \end{cases}$ 之交點數，由圖形知有 2 個交點

故方程式 $-x+3=\log_{\frac{1}{2}} x$ 有 2 個實根



例題 5

設 $y=\log_a(x+2)$ 之圖形如右且通過（1，2），（b，0），（7，c），
則 $a=$________，$b=$________，$c=$________。（每格 2 分，共 6 分）



解　∵過點（1，2）　∴$2=\log_a 3$ ⇨ $a^2=3$ ⇨ $a=\sqrt{3}$

∵過點（b，0）

∴ $\log_{\sqrt{3}}(b+2)=0$ ⇨ $b+2=1$ ⇨ $b=-1$

∵過點（7，c）　∴ $\log_{\sqrt{3}}9=c$ ⇨ $c=4$

重點二　對數方程式與對數不等式

例題 6

試解下列各方程式：

(1) $1+\log_4(x-1)=\log_2(x-9)$。（5 分）

(2) $2\log_3 x-6\log_x 3-1=0$。（5 分）

解　(1)∵真數＞0　∴ $\begin{cases} x-1>0 \\ x-9>0 \end{cases}$ ⇨ $x>9$ ……………………①

又 $1+\log_4(x-1)=\log_2(x-9)$ ⇨ $\log_4 4+\log_4(x-1)=\log_4(x-9)^2$

⇨ $\log_4[4(x-1)]=\log_4(x-9)^2$ ⇨ $4(x-1)=(x-9)^2$ ⇨ $x^2-22x+85=0$

⇨ $(x-5)(x-17)=0$　∴$x=5$ 或 17…………………②

由①、②知 $x=17$

(2)$2\log_3 x-6\log_x 3-1=0$ ⇨ $2\log_3 x-6\times\dfrac{1}{\log_3 x}-1=0$

⇨ $2(\log_3 x)^2-(\log_3 x)-6=0$

⇨ $(\log_3 x-2)(2\log_3 x+3)=0$ ⇨ $\log_3 x=2$ 或 $\log_3 x=-\dfrac{3}{2}$

⇨ $x=3^2=9$ 或 $x=3^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

故 $x=9$ 或 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

例題 7

試解下列各方程式：

(1) $2^{-x+3}=7$。（4 分）

(2) $3^{2x+1}-16\times3^x+5=0$。（4 分）

解　(1)$2^{-x+3}=7$ ⇨ $\log_2 2^{-x+3}=\log_2 7$

⇨ $-x+3=\log_2 7$ ⇨ $x=3-\log_2 7$

(2)$3^{2x+1}-16\times3^x+5=0$

⇨ $3\times(3^x)^2-16\times(3^x)+5=0$

⇨ $(3\times3^x-1)(3^x-5)=0$

⇨ $3^x=\dfrac{1}{3}$ 或 $3^x=5$

⇨ $x=-1$ 或 $x=\log_3 5$

例題 8

(1) 設 $a=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{4}$，$b=\log_3\dfrac{1}{12}$，$c=\log_{\frac{1}{9}}\dfrac{1}{36}$，$d=\log_9\dfrac{1}{16}$，則 a，b，c，d 之大小順序為________。（4 分）

(2) 設 $a=\log_{\frac{1}{2}}3$，$b=\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{3}$，$c=\log_{\frac{1}{3}}2$，$d=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{2}$，則 a，b，c，d 之大小順序為________。（4 分）

解　(1)$a=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{4}=\log_{3^{-1}}4^{-1}=\frac{-1}{-1}\log_3 4=\log_3 4$

$b=\log_3\frac{1}{12}$

$c=\log_{\frac{1}{9}}\frac{1}{36}=\log_{3^{-2}}6^{-2}=\frac{-2}{-2}\log_3 6=\log_3 6$

$d=\log_9\frac{1}{16}=\log_{3^2}\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{2}{2}\log_3\frac{1}{4}=\log_3\frac{1}{4}$

$\because \log_3 6>\log_3 4>\log_3\frac{1}{4}>\log_3\frac{1}{12}$

$\therefore c>a>d>b$

(2)$a=\log_{\frac{1}{2}}3=-\log_2 3<-\log_2 2=-1$

$b=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}=\frac{-1}{-1}\log_2 3=\log_2 3>\log_2 2=1$

$c=\log_{\frac{1}{3}}2=-\log_3 2>-\log_3 3=-1$

$d=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}=\frac{-1}{-1}\log_3 2=\log_3 2<\log_3 3=1$

由以上可知 $b>1>d>0>c>-1>a$

⇨ $b>d>c>a$

例題 9

試求下列各不等式之解：

(1) $\log_2(\log_{\frac{1}{3}}x)<1$。(5 分)　　(2) $\log_3(x^2+x-2)<1$。(5 分)

解　(1)$\log_2(\log_{\frac{1}{3}}x)<1$ ⇨ $0<\log_{\frac{1}{3}}x<2$

⇨ $\left(\frac{1}{3}\right)^2<x<\left(\frac{1}{3}\right)^0$ ⇨ $\frac{1}{9}<x<1$

(2)∵真數 $x^2+x-2>0$ ⇨ $(x+2)(x-1)>0$

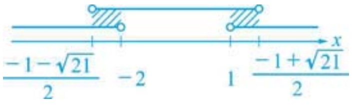
⇨ $x>1$ 或 $x<-2$…………………………①

又 $\log_3(x^2+x-2)<1$

⇨ $x^2+x-2<3$ ⇨ $x^2+x-5<0$

⇨ $\frac{-1-\sqrt{21}}{2}<x<\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$……………②

由①、②知 $\frac{-1-\sqrt{21}}{2}<x<-2$ 或 $1<x<\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$



例題 10

試求不等式 $\log_2(x+1)\le 1+\log_4(x+2)$ 之解。(5 分)

解　∵真數 $\begin{cases}x+1>0\\x+2>0\end{cases}$ ⇨ $\begin{cases}x>-1\\x>-2\end{cases}$ ⇨ $x>-1$……………①

又 $\log_2(x+1)\le 1+\log_4(x+2)$

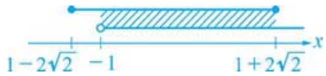
⇨ $\log_4(x+1)^2 \le \log_4 4+\log_4(x+2)$

⇨ $\log_4(x+1)^2 \le \log_4(4(x+2))$

⇨ $(x+1)^2 \le 4x+8$ ⇨ $x^2-2x-7 \le 0$

⇨ $1-2\sqrt{2} \le x \le 1+2\sqrt{2}$ ………………………………②

由①、②得$-1<x \le 1+2\sqrt{2}$



例題 11

函數 $f(x)=\log_3(\log_{\frac{1}{2}} x)$，這函數的定義域是使 $f(x)$有意義的實數 x，則 x 的範圍為________。（5 分）

解　∵$\log_3(\log_{\frac{1}{2}} x)$有意義

∴真數 $\log_{\frac{1}{2}} x$ 必為正數

即$\log_{\frac{1}{2}} x>0$ ⇨ $x<1$……………①

又真數 x 為正 ⇨ $x>0$ …………②

由 ①、② 知 $0<x<1$

例題 12

現有細菌數 100 個，每隔 1 個小時細菌就會分裂而使數量加倍，約需________小時才會使細菌數超過一百萬個？（利用 $\log_{10}2=0.3010$ 且答案取整數）（6 分）

解　設 n 小時後超過一百萬個

則 $100\cdot 2^n>10^6$ ⇨ $2^n>10^4$，兩邊取常用對數得 $\log 2^n>\log 10^4$ ⇨ $n\log 2>4$

⇨ $n>\dfrac{4}{0.3010}\approx 13.\cdots\cdots$，故約需 14 小時才會使細菌數超過一百萬個