

3-2 指數函數

重點一 指數函數的圖形與性質

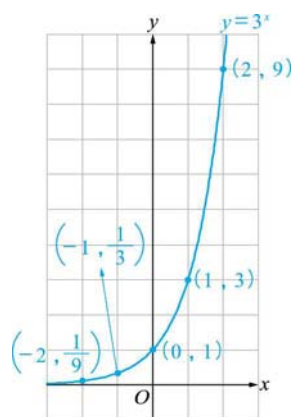
例題 1

利用描點法描繪 $y=3^x$ 的圖形。(4 分)

解 先將一些滿足 $y=3^x$ 的數對 (x, y) 列表如下：

| | | | | | |
|---------|---------------|---------------|---|---|---|
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $y=3^x$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 | 3 | 9 |

我們得到 $y=3^x$ 圖形上的一些點，
並將這些點用平滑曲線連接起來
就可以得到函數 $y=3^x$ 的圖形



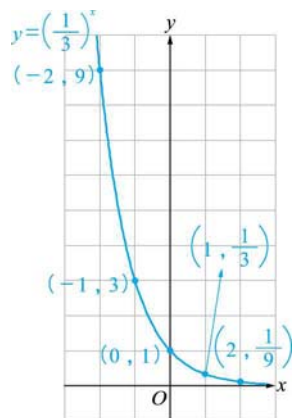
例題 2

利用描點法描繪 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的圖形。(4 分)

解

| | | | | | |
|--------------------------------|----|----|---|---------------|---------------|
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ | 9 | 3 | 1 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{9}$ |

得 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的圖形如左



例題 3

試利用 $y=2^x$ 的圖形，描繪下列各函數的圖形：

(1) $y=-2^x$ 。(4分)

(3) $y=-2^{-x}$ 。(4分)

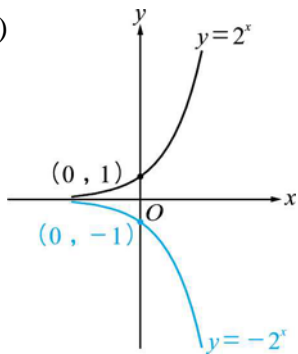
(5) $y=2^{x-1}$ 。(4分)

(2) $y=2^{-x}$ 。(4分)

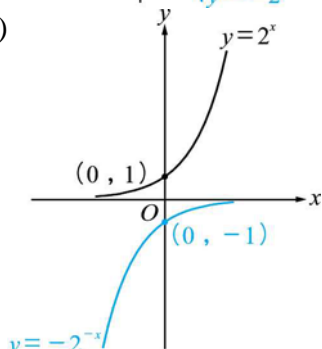
(4) $y=2^{|x|}$ 。(4分)

(6) $y=2^x+1$ 。(4分)

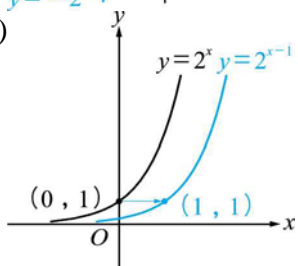
解 (1)



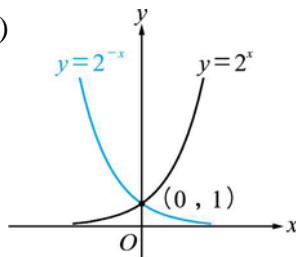
(3)



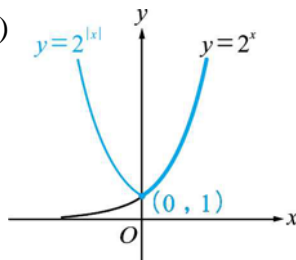
(5)



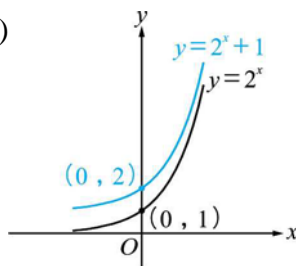
(2)



(4)



(6)



例題 4

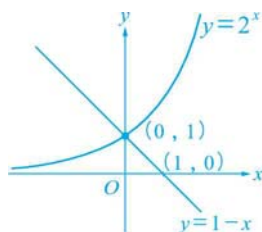
試問方程式 $2^x+x-1=0$ 有_____個實根。(4分)

解 $2^x+x-1=0$ 之實根個數

即為 $\begin{cases} y=2^x \\ y=1-x \end{cases}$ 之交點數

由下圖知有 1 個交點

亦即方程式 $2^x+x-1=0$ 恰有 1 個實根



重點二 指數方程式與指數不等式

例題 5

試解下列各方程式：

(1) $(2^x)^2=64$ 。(4分)

(2) $2^{x^2}=64$ 。(4分)

(3) $(\sqrt{0.1})^{3x-2} = 10^{-2x+3}$ 。(4分) (4) $2^{5x+3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4x+8} = \left(\frac{1}{4}\right)^{3x^2}$ 。(4分)

解 (1) $(2^x)^2 = 64 \Rightarrow 2^{2x} = 2^6 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$
 (2) $2^{x^2} = 64 \Rightarrow 2^{x^2} = 2^6 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6}$
 (3) $(\sqrt{0.1})^{3x-2} = 10^{-2x+3} \Rightarrow (10^{-1})^{\frac{3x-2}{2}} = 10^{-2x+3}$
 $\Rightarrow 10^{\frac{-3x+2}{2}} = 10^{-2x+3} \Rightarrow \frac{-3x+2}{2} = -2x+3$
 $\Rightarrow -3x+2 = -4x+6 \Rightarrow x = 4$

(4) $2^{5x+3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4x+8} = \left(\frac{1}{4}\right)^{3x^2} \Rightarrow 2^{5x+3} \cdot 2^{-4x-8} = 2^{-6x^2}$
 $\Rightarrow 2^{x-5} = 2^{-6x^2} \Rightarrow x-5 = -6x^2$
 $\Rightarrow 6x^2+x-5=0 \Rightarrow (6x-5)(x+1) = 0$
 $\Rightarrow x = \frac{5}{6}$ 或 $x = -1$

例題 6

試解下列各方程式：

(1) $6^x - 2^x - 4 \times 3^x + 4 = 0$ 。(4分)

(2) $3^{2x} - 6 \times 3^x - 27 = 0$ 。(4分)

解 (1) $6^x - 2^x - 4 \times 3^x + 4 = 0 \Rightarrow 2^x \times 3^x - 2^x - 4 \times 3^x + 4 = 0$
 $\Rightarrow (2^x - 4)(3^x - 1) = 0 \Rightarrow 2^x = 4$ 或 $3^x = 1$
 $\Rightarrow x = 2$ 或 $x = 0$
 (2) $3^{2x} - 6 \times 3^x - 27 = 0 \Rightarrow (3^x)^2 - 6 \times (3^x) - 27 = 0$
 $\Rightarrow (3^x + 3)(3^x - 9) = 0$
 $\because 3^x + 3$ 恆正
 $\therefore 3^x = 9 \Rightarrow x = 2$

例題 7

(1) 試比較 $A = 4^{\frac{5}{2}} \times 8^{-1}$, $B = (2^{-\frac{2}{9}})^9$, $C = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}}$ 之大小。(4分)

(2) 試比較 $A = 2^{\frac{1}{2}}$, $B = 3^{\frac{1}{3}}$, $C = 10^{\frac{1}{6}}$ 之大小。(4分)

解 (1) $A = 4^{\frac{5}{2}} \times 8^{-1} = (2^2)^{\frac{5}{2}} \times (2^3)^{-1} = 2^5 \times 2^{-3} = 2^2$
 $B = (2^{-\frac{2}{9}})^9 = 2^{-2}$
 $C = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}} = (2^{-1})^{-\frac{4}{3}} = 2^{\frac{4}{3}}$
 \because 底數 $2 > 1$ 且 $2 > \frac{4}{3} > -2$
 $\therefore 2^2 > 2^{\frac{4}{3}} > 2^{-2}$
 故 $A > C > B$

(2) 把三數化成指數都是 $\frac{1}{6}$ 的有理指數

$A = 2^{\frac{1}{2}} = (2^3)^{\frac{1}{6}} = 8^{\frac{1}{6}}$

$$B = 3^{\frac{1}{3}} = (3^2)^{\frac{1}{6}} = 9^{\frac{1}{6}}$$

$$C = 10^{\frac{1}{6}}$$

$$\because 8 < 9 < 10 \quad \therefore 8^{\frac{1}{6}} < 9^{\frac{1}{6}} < 10^{\frac{1}{6}}$$

故 $A < B < C$

例題 8

試解下列各不等式：

(1) $10^{x^2-2x} > 1000$ 。(4 分)

(2) $(0.1)^{x^2-2x} > 0.001$ 。(4 分)

(3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \leq 16 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^x$ 。(4 分)

解 (1) $10^{x^2-2x} > 1000 \Rightarrow 10^{x^2-2x} > 10^3$

$$\because \text{底數 } 10 > 1$$

$$\therefore x^2 - 2x > 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 > 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x+1) > 0 \Rightarrow x > 3 \text{ 或 } x < -1$$

(2) $(0.1)^{x^2-2x} > 0.001 \Rightarrow (0.1)^{x^2-2x} > (0.1)^3$

$$\because \text{底數 } 0 < 0.1 < 1$$

$$\therefore x^2 - 2x < 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 < 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x+1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 3$$

(3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \leq 16 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^x \Rightarrow 2^{-x-1} \leq 2^4 \leq 2^{-2x}$

$$\Rightarrow -x-1 \leq 4 \leq -2x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x-1 \leq 4 \\ 4 \leq -2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x \leq -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -5 \leq x \leq -2$$

例題 9

試解下列各不等式：

(1) $9^x + 3^x - 2 \geq 0$ 。(4 分)

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - \frac{5}{4} \times 2^{-x} + \frac{1}{4} < 0$ 。(4 分)

解 (1) $9^x + 3^x - 2 \geq 0 \Rightarrow (3^x)^2 + (3^x) - 2 \geq 0$

$$\Rightarrow (3^x + 2)(3^x - 1) \geq 0$$

$$\because 3^x + 2 > 0 \text{ 恆成立}$$

$$\therefore 3^x \geq 1 = 3^0 \Rightarrow x \geq 0$$

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - \frac{5}{4} \times 2^{-x} + \frac{1}{4} < 0$

$$\Rightarrow \left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^2 - \frac{5}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + \frac{1}{4} < 0$$

$$\text{令 } t = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \text{ 得 } t^2 - \frac{5}{4}t + \frac{1}{4} < 0$$

$$\Rightarrow 4t^2 - 5t + 1 < 0 \Rightarrow (4t-1)(t-1) < 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} < t < 1 \Rightarrow \frac{1}{4} < \left(\frac{1}{2}\right)^x < 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^0$$

$$\therefore 0 < \frac{1}{2} < 1 \quad \therefore 0 < x < 2$$

例題 10

設 $-3 \leq x \leq 2$ ，則 $f(x) = 4^{x+1} - 2^{x+1}$ 之最大值為_____，最小值為_____。(每格 4 分，共 8 分)

解 $f(x) = 4^{x+1} - 2^{x+1}$

$$= 4 \times 4^x - 2 \times 2^x$$

$$= 4 \times (2^x)^2 - 2 \times (2^x)$$

$$= 4 \times \left(2^x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$\therefore -3 \leq x \leq 2 \Rightarrow 2^{-3} \leq 2^x \leq 2^2 \Rightarrow \frac{1}{8} \leq 2^x \leq 4$$

\therefore 當 $2^x = 4$ ，亦即 $x = 2$ 時， $f(x)$ 有最大值 $4 \times 4^2 - 2 \times 4 = 56$

當 $2^x = \frac{1}{4}$ ，亦即 $x = -2$ 時， $f(x)$ 有最小值 $-\frac{1}{4}$

例題 11

某地價的房屋折舊價格為第一年折舊 10%，往後每年折舊 5%。若一棟全新房屋以 1000 萬元售出，則 10 年後該屋的價格為_____萬元。 $(0.95^9 \approx 0.630)$ (4 分)

解 設 $f(t)$ 為 t 年後的折舊價格

$$\text{則 } f(t) = 1000 \times 0.9 \times (0.95)^{t-1}, t \geq 2$$

$$f(10) = 1000 \times 0.9 \times (0.95)^9$$

$$\approx 1000 \times 0.9 \times 0.630$$

$$= 567$$

故 10 年後此屋的折舊價格是 567 萬元