2-3　多項式方程式

重點一　複數

例題 1

化簡下列各式：

(1) $\sqrt{-12}=$________。(2 分)

(2) $i^{15}=$________。(2 分)

(3) $1+i+i^2+i^3+i^4+i^5=$________。(2 分)

(4) $i-2i^2+3i^3-4i^4+5i^5-6i^6=$________。(2 分)

解　(1) $\sqrt{-12}=\sqrt{12}\,i=2\sqrt{3}\,i$

(2) $i^{15}=(i^4)^3\times i^3=i^3=-i$

(3) $1+i+i^2+i^3+i^4+i^5$

$=1+i+(-1)+(-i)+1+i$

$=1+i$

(4) $i-2i^2+3i^3-4i^4+5i^5-6i^6$

$=i+2-3i-4+5i+6$

$=4+3i$

例題 2

試求下列各數的共軛複數：

(1) $5+7i$。(2 分)

(2) $-3i-2$。(2 分)

(3) 4。(2 分)

(4) $3i$。(2 分)

解　(1) $\overline{5+7i}=5-7i$

(2) $\overline{-3i-2}=\overline{-2-3i}=-2+3i$

(3) $\overline{4}=\overline{4+0i}=4-0i=4$

(4) $\overline{3i}=\overline{0+3i}=0-3i=-3i$

例題 3

化簡下列各式：

(1) $(2+3i)(5-4i)$。(3 分)

(2) $(1+i)^8$。(3 分)

(3) $\dfrac{1-3i}{2+i}$。(3 分)

(4) $\dfrac{7+2i}{3-4i}+\dfrac{7-2i}{3+4i}$。(3 分)

解　(1) $(2+3i)(5-4i)=10-8i+15i-12i^2$

$=10-8i+15i+12=22+7i$

(2) $\because (1+i)^2=1+2i+i^2=1+2i-1=2i$

$\therefore (1+i)^8=[(1+i)^2]^4=(2i)^4=16i^4=16$

(3) $\dfrac{1-3i}{2+i}=\dfrac{(1-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{2-i-6i+3i^2}{2^2-i^2}=\dfrac{2-i-6i-3}{5}=\dfrac{-1-7i}{5}$

(4) $\dfrac{7+2i}{3-4i}+\dfrac{7-2i}{3+4i}=\dfrac{(7+2i)(3+4i)+(7-2i)(3-4i)}{(3-4i)(3+4i)}$

$=\dfrac{21+28i+6i-8+21-28i-6i-8}{25}$

$=\dfrac{13+13}{25}=\dfrac{26}{25}$

重點二　一元二次方程式的解

例題 4

試解下列各方程式：

(1) $2x^2-5x-4=0$。（3 分）

(2) $4x^2+20x+25=0$。（3 分）

(3) $2x^2-8x+11=0$。（3 分）

解　(1) $2x^2-5x-4=0$

⇨ $x=\dfrac{5\pm\sqrt{5^2-4\times2\times(-4)}}{4}=\dfrac{5\pm\sqrt{57}}{4}$

(2) $4x^2+20x+25=0$

⇨ $(2x+5)^2=0$

⇨ $x=-\dfrac{5}{2}$，$-\dfrac{5}{2}$

(3) $2x^2-8x+11=0$

⇨ $x=\dfrac{8\pm\sqrt{8^2-4\times2\times11}}{4}=\dfrac{8\pm\sqrt{-24}}{4}=\dfrac{8\pm2\sqrt{6}i}{4}=\dfrac{4\pm\sqrt{6}i}{2}$

例題 5

設 k 為實數，方程式 $x^2+3x-k=0$，

(1) 若方程式有兩相異實根，則 k 之範圍為________。（3 分）

(2) 若方程式有兩相等實根，則 k 之範圍為________。（3 分）

(3) 若方程式有兩共軛虛根，則 k 之範圍為________。（3 分）

(4) 若方程式有兩實根，則 k 之範圍為________。（3 分）

解　判別式 $D=3^2-4\times1\times(-k)=9+4k$

(1)兩相異實根，則 $D>0$ ⇨ $9+4k>0$ ⇨ $k>-\dfrac{9}{4}$

(2)兩相等實根，則 $D=0$ ⇨ $9+4k=0$ ⇨ $k=-\dfrac{9}{4}$

(3)兩共軛虛根，則 $D<0$ ⇨ $9+4k<0$ ⇨ $k<-\dfrac{9}{4}$

(4)兩實根，則 $D\geq0$ ⇨ $9+4k\geq0$ ⇨ $k\geq-\dfrac{9}{4}$

例題 6

設 α，β 為方程式 $x^2+7x+5=0$ 之兩根，則：

(1) $\alpha^2+\beta^2=$________。(3 分)　(2) $\alpha^3+\beta^3=$________。(3 分)

(3) $\alpha-\beta=$________。(3 分)　(4) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}=$________。(3 分)

解　由根與係數的關係知 $\alpha+\beta=-7$，$\alpha\beta=5$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=(-7)^2-2\times5$
$=49-10=39$

(2) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=(-7)^3-3\times5\times(-7)=-343+105=-238$

(3) $\because(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$=(-7)^2-4\times5=49-20=29$，　$\therefore\alpha-\beta=\pm\sqrt{29}$

(4) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{39}{5}$

例題 7

設 a 為實數，若方程式 $x^2-(a+i)x-(3+i)=0$ 有一實根，則：

(1) $a=$________。(3 分)

(2) 此方程式之解為________。(3 分)

解　(1)設方程式的實根為 α

則 $\alpha^2-(a+i)\alpha-(3+i)=0$

⇨ $(\alpha^2-a\alpha-3)+(-\alpha-1)i=0$

令 $\begin{cases}\alpha^2-a\alpha-3=0\\-\alpha-1=0\end{cases}$ ⇨ $\alpha=-1$，$a=2$，　$\therefore a=2$

(2)由(1)知 $x^2-(2+i)x-(3+i)=0$ 有實根為 -1

設另一根為 β，由兩根和知 $(-1)+\beta=2+i$ ⇨ $\beta=3+i$

故方程式之解為 -1，$3+i$

重點三　代數基本定理

例題 8

$x^6-1=0$ 的六個根為________。(6 分)

解　$\because x^6-1=(x^3-1)(x^3+1)$
$=(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)=0$

$\therefore x-1=0$ 或 $x^2+x+1=0$ 或 $x+1=0$ 或 $x^2-x+1=0$

⇨ $x=1$ 或 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 或 $x=-1$ 或 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

故 $x^6-1=0$ 的六個根為 1，-1，$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$，$\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

重點四　整係數多項式方程式的一次因式檢驗法

例題 9

(1) 試利用一次因式檢驗法將多項式 $f(x)=2x^3-x^2-11x+10$ 分解為質因式的乘積。（3 分）
(2) 解方程式 $2x^3-x^2-11x+10=0$。（3 分）

解　(1)設 $ax-b$ 為 $f(x)$ 之一次因式，其中 a，$b\in ¢$，$(a, b)=1$，則 $a\mid 2$ 且 $b\mid 10$

⇨ a 之可能值為 ±1，±2

b 之可能值為 ±1，±2，±5，±10

因此可能的一次因式為 $x\pm1$，$x\pm2$，$x\pm5$，$x\pm10$，$2x\pm1$，$2x\pm5$

由 $f(1)=2-1-11+10=0$ 知 $f(x)$ 有 $x-1$ 的因式

利用長除法得 $f(x)=(x-1)(2x^2+x-10)=(x-1)(x-2)(2x+5)$

(2)由(1)知 $2x^3-x^2-11x+10=0$

⇨ $(x-1)(x-2)(2x+5)=0$

⇨ $x=1，2，-\dfrac{5}{2}$

重點五　虛根成對定理

例題 10

設 a，b，c 均為實數，若 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 有兩根 3，$1-2i$，則序組 (a, b, c) $=$________。（3 分）

解　實係數方程式有一根為 $1-2i$，必有另一根 $1+2i$

⇨ $[x-(1-2i)][x-(1+2i)]=[(x-1)+2i][(x-1)-2i]$

$=(x-1)^2-(2i)^2$

$=x^2-2x+1+4=x^2-2x+5$ 為 $f(x)$ 之因式

又 3 為其一根

$\therefore x^3+ax^2+bx+c=(x^2-2x+5)(x-3)=x^3-5x^2+11x-15$

⇨ $a=-5$，$b=11$，$c=-15$

故序組 $(a, b, c)=(-5, 11, -15)$

例題 11

設 $f(x)=x^4-2x^3-5x^2-6x+69$，則 $f(3-i)=$________。（3 分）

解　以 $3-i$ 和 $3+i$ 為根的多項式方程式為

$[x-(3-i)][x-(3+i)]=[(x-3)+i][(x-3)-i]$

$=(x-3)^2-i^2$

$=x^2-6x+10$

由長除法知

$f(x)=(x^2-6x+10)(x^2+4x+9)+(8x-21)$

故 $f(3-i)=0\times[(3-i)^2+4(3-i)+9]+8(3-i)-21$

$=24-8i-21=3-8i$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1+4+\ 9 \\
\hline
1-6+10 & 1-2-\ 5-\ 6+69 \\
 & 1-6+10 \\
\cline{2-2}
 & \quad 4-15-\ 6 \\
 & \quad 4-24+40 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\quad 9-46+69 \\
 & \qquad\quad 9-54+90 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad 8-21
\end{array}
$$

重點六　勘根定理

例題 12

方程式 $f(x)=2x^3-x^2-6x+1=0$ 之實根，分別介於下列哪兩個連續整數之間？（5 分）

(A)-2 與 -1　(B)-1 與 0　(C)0 與 1　(D)1 與 2　(E)2 與 3

解　$\because$

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-7	4	1	-4	1	28

$\therefore$ 方程式 $f(x)=0$ 的三根分別落在 $(-2,-1)$，$(0,1)$，$(1,2)$ 之間

故選(A)(C)(D)

例題 13

最接近 $\sqrt[3]{9600}$ 的整數為________。（5 分）

解　$\sqrt[3]{9600}$ 是方程式 x^3-9600 的正根

設 $f(x)=x^3-9600$

由 $f(20)=8000-9600=-1600$

$f(21)=9261-9600=-339$

$f(22)=10648-9600=1048$

可知 $\sqrt[3]{9600}$ 介於 21 與 22 之間

又 $f(21.5)>0$

得出最接近 $\sqrt[3]{9600}$ 的整數為 21

重點七　分式方程式

例題 14

方程式$\dfrac{x^2+7x-17}{x^2-3x+2}=\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{5}{x-2}$之解為________。（5 分）

解　$\dfrac{x^2+7x-17}{x^2-3x+2}=\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{5}{x-2}$

⇨ $\dfrac{x^2+7x-17}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{3x-6+5x-5}{(x-1)(x-2)}$

移項得$\dfrac{x^2-x-6}{(x-1)(x-2)}=0$

⇨ $x^2-x-6=0$

⇨ $(x-3)(x+2)=0$

⇨ $x=3$ 或 $x=-2$