

第 4 章 綜合演練

月 日 得分

一、單選題

1. 已知二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ，則 A^2 為下列哪個方陣？

- (A) $\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$

解 $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 3+3 \\ 0+0 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

故選(B)

2. 某線性變換將坐標平面上的點以原點為中心逆時針旋轉 60° ，試問其變換矩陣為下列哪個選項？

- (A) $\begin{bmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -\cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix}$
 (D) $\begin{bmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ -\sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & -\cos 60^\circ \end{bmatrix}$

解 以原點為中心逆時針旋轉 θ 角的變換矩陣為 $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

故選(C)

二、多選題

3. 下列哪些二階方陣有乘法反方陣？

- (A) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 33 & 2 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

解 若二階方陣的行列式值不為 0，則此方陣的乘法反方陣存在

(A) $\circ : \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 8 = 1$

(B) $\times : \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0$

(C) $\circ : \begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 33 & 2 \end{vmatrix} = 22 - 33 = -11$

(D) $\circ : \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -6 - 6 = -12$

(E) $\times : \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$

故選(A)(C)(D)

4. 坐標平面上的三角形經過下列哪幾個二階方陣變換後，面積可以保持不變？

- (A) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
- (D) $\begin{bmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix}$ (E) $\begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix}$

解 線性變換後與變換前的面積比，恰為變換方陣行列式值的絕對值
欲使變換前後面積不變，必須其行列式值為 ± 1

- (A) $\circ : \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$
- (B) $\circ : \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$
- (C) $\circ : \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 1$
- (D) $\times : \begin{vmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{vmatrix} = \cos^2 60^\circ - \sin^2 60^\circ = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$
- (E) $\circ : \begin{vmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{vmatrix} = \cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ = 1$

故選(A)(B)(C)(E)

三、填充題

5. 已知二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ k & 3 \end{bmatrix}$ ，試問：

- (1) A 的乘法反方陣 A^{-1} 不存在，則 $k = \underline{\hspace{2cm}}$
- (2) 平面上面積為 6 的平行四邊形經 A 作線性變換後，面積變為 48，已知 $k > 0$ ，則 $k = \underline{\hspace{2cm}}$

解 (1) 若 $\det A = 0$ ，則 A^{-1} 不存在

$$\begin{aligned} \text{令 } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ k & 3 \end{vmatrix} &= 0 \\ \Rightarrow |6 - k| &= 0 \Rightarrow k = 6 \end{aligned}$$

(2) 面積比為 $\frac{48}{6} = 8$

$$\begin{aligned} \therefore \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ k & 3 \end{vmatrix} &= 8 \\ \Rightarrow 6 - k &= \pm 8 \Rightarrow k = 14 \text{ 或 } k = -2 \\ \text{又 } k > 0 \quad \therefore k &= 14 \end{aligned}$$

6. (1) 已知 $2A - 3B = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$, $A + 2B = \begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$, 則方陣 $A =$ _____

(2) 已知二階方陣 $T = \begin{bmatrix} a & \frac{2}{5} \\ 2a & b \end{bmatrix}$ 為轉移矩陣, 則數對 $(a, b) =$ _____

解 (1) 由已知得

$$4A - 6B = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ -14 & 4 \end{bmatrix}$$

$$3A + 6B = \begin{bmatrix} 12 & 33 \\ 21 & 24 \end{bmatrix}$$

兩式相加 (消去 B) 得 $7A = \begin{bmatrix} 14 & 21 \\ 7 & 28 \end{bmatrix}$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

(2) 轉移矩陣各行之和為 1

$$a + 2a = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{5} + b = 1 \quad \therefore b = \frac{3}{5}$$

故數對 $(a, b) = \left(\frac{1}{3}, \frac{3}{5}\right)$

7. (1) 將增廣矩陣 $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & 7 \end{array} \right]$ 使用列運算, 變成 $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{array} \right]$, 則數對 $(a, b) =$ _____

(2) 使用矩陣列運算將增廣矩陣 $\left[\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & b \\ 3 & c & 1 & 0 \end{array} \right]$ 變為 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$, 則序組 $(a, b, c) =$ _____

解 (1) $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 5 & 7 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array}$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 5 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \times (-3) \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 7 \\ 0 & -16 & -16 \end{array} \right] \times \left(-\frac{1}{16}\right)$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \times (-5) \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

故數對 $(a, b) = (2, 1)$

(2) 由已知得矩陣對應的方程組之解為 $(x, y, z) = (1, -2, 3)$

而增廣矩陣對應的方程組為
$$\begin{cases} ax + 2y + z = 1 \\ 2x + 5y + 3z = b \\ 3x + cy + z = 0 \end{cases}$$

將 $(x, y, z) = (1, -2, 3)$ 代入得

$$\begin{cases} a - 4 + 3 = 1 \\ 2 - 10 + 9 = b \\ 3 - 2c + 3 = 0 \end{cases}$$

解得 $a = 2, b = 1, c = 3$

故序組 $(a, b, c) = (2, 1, 3)$

8. 已知二階方陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ，則：

(1) $A^3 =$ _____

(2) $A^{2029} =$ _____

解

$$(1) A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(2) 承(1)， $A^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I_2$

$$A^{2029} = A^{3 \times 676 + 1} = (A^3)^{676} A = (-I_2)^{676} A = I_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

9. (1) 坐標平面上，點 $P(6, -4)$ 對直線 $x - \sqrt{3}y = 0$ 作鏡射後，新坐標為 _____

(2) 在坐標平面上，將點 $A(4, 2)$ 沿 x 軸推移 y 坐標的 3 倍，再以原點為中心旋轉 60° ，得新坐標為 _____

解

(1) 對稱軸過原點且斜率為 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ，故知此線與 x 軸正向夾 30° 角，

鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & -\cos 60^\circ \end{bmatrix}$

$$\text{得 } \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & -\cos 60^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3}+2 \end{bmatrix}$$

故知變換後的點坐標為 $(3-2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}+2)$

$$(2) \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3}+1 \end{bmatrix}$$

\therefore 新坐標 $(5-\sqrt{3}, 5\sqrt{3}+1)$

10. (1) 二階方陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ 滿足 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, 則數對 (a, b)
 = _____
- (2) 已知矩陣 A 滿足 $A \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = [1 \quad 1]$, 則矩陣 $A =$ _____

解 (1) $\because (A+B)^2 = (A+B)(A+B)$
 $= A^2 + AB + BA + B^2$

由已知, $AB + BA = 2AB$

$\therefore AB = BA$, 即 $\begin{bmatrix} a & b \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3a+b & a+3b \\ 13 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a+3 & 3b+4 \\ a+9 & b+12 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} 3a+b = 3a+3 & \dots\dots\dots \textcircled{1} \\ a+3b = 3b+4 & \dots\dots\dots \textcircled{2} \\ a+9 = 13 & \dots\dots\dots \textcircled{3} \\ b+12 = 15 & \dots\dots\dots \textcircled{4} \end{cases}$

由①得 $b=3$, 由②得 $a=4$, 由③得 $a=4$, 由④得 $b=3$
 故數對 $(a, b) = (4, 3)$

(2) 由已知

$A \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1}$

$\Rightarrow A = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = [2 \quad -1]$

故矩陣 $A = [2 \quad -1]$

四、計算題

11. 某地有甲、乙兩種報紙, 根據統計, 訂閱甲報經一年後仍訂閱甲報者有 40%, 其餘改訂乙報; 訂閱乙報經一年後仍訂乙報者為 70%, 其餘則改訂甲報。試求:
- (1) 轉移矩陣
- (2) 假設目前訂甲報占 50%, 訂乙報占 50%。則:
- ① 經過一年後訂閱甲報者占多少比例?
- ② 經過兩年後訂閱甲報者占多少比例?

解 (1) 由已知, 轉移矩陣

$A = \begin{bmatrix} \text{甲} & \text{乙} \\ 0.4 & 0.3 \\ 0.6 & 0.7 \end{bmatrix}$

(2) 令 $X_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

① 一年後, $X_1 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.6 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.35 \\ 0.65 \end{bmatrix}$

\therefore 訂甲報者占 35%

② 兩年後, $X_2 = AX_1 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.3 \\ 0.6 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.35 \\ 0.65 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.335 \\ 0.665 \end{bmatrix}$

\therefore 訂甲報者占 33.5%

12. 坐標平面上兩點 $P(1, -1)$ 、 $Q(-2, 3)$ 經過二階方陣 A 作線性變換後，得到對應的點 $P'(1, -1)$ 、 $Q'(-1, 6)$ ，試求二階方陣 A

解 設 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，由已知

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{則 } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$