

4-3 組合

例題 1 組合公式

(1) 試計算 C_3^{20} 的值

(2) 已知 $C_k^{12} = C_3^{12}$ ，試求 k 值

解 (1) $C_3^{20} = \frac{20 \times 19 \times 18}{1 \times 2 \times 3} = 1140$

(2) $k=3$ 或 $k=12-3=9$

$\therefore k=3$ 或 9

例題 2 基礎組合問題(一)

(1) 某校規定，學生須在修業期間內，從 8 個開放選修的科目中選修 3 個，試問有幾種可能的選修組合？

(2) 某高中打算從週一到週五的五天中，挑選兩天開放穿便服到校，試問有幾種安排的方式？

解 (1) $C_3^8 = \frac{8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3} = 56$ (種)

(2) $C_2^5 = \frac{5 \times 4}{1 \times 2} = 10$ (種)

例題 3 基礎組合問題(二)

平面上有 8 個相異點，任 3 點不共線，則：

(1) 可決定幾條直線？

(2) 可決定幾個三角形？

解 (1) $C_2^8 = \frac{8 \times 7}{1 \times 2} = 28$ (條)

(2) $C_3^8 = \frac{8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3} = 56$ (個)

例題 4 組合與乘法原理

(1) 為慶祝週年慶，某餐廳特別提供「保證飽特餐」回饋顧客。內容為沙拉或湯 6 選 2，主菜 5 選 2，主食 3 選 1，飲料或甜點 5 選 2。試問共有幾種點餐組合的可能？

(2) 某社區管委會打算從 8 名男性及 7 名女性委員中，選出 5 名常務委員，如果規定任何一個性別都不能少於 2 人，試問有幾種可能的組合？

解 (1) $C_2^6 \times C_2^5 \times C_1^3 \times C_2^5 = 15 \times 10 \times 3 \times 10 = 4500$ (種)

(2) 由題意知，可能是 2 男 3 女或 3 男 2 女

$\therefore C_2^8 \times C_3^7 + C_3^8 \times C_2^7 = 28 \times 35 + 56 \times 21 = 980 + 1176 = 2156$ (種)

例題 5 分組分堆問題

將 8 本不同的書依下列方式分成 3 堆，試求各有幾種分法？

- (1) 一堆 5 本，一堆 2 本，一堆 1 本
- (2) 一堆 4 本，一堆 2 本，一堆 2 本

解 (1) $C_3^8 \times C_2^3 \times C_1^1 = 56 \times 3 \times 1 = 168$ (種)

$$(2) C_4^8 \times C_2^4 \times C_2^2 \times \frac{1}{2!} = 70 \times 6 \times \frac{1}{2} = 210 \text{ (種)}$$

例題 6 組合問題

將 5 枝完全相同的鉛筆分給小朋友，試求各有幾種分法？

- (1) 分給 8 個小朋友，每人最多 1 枝 (有 3 人沒有鉛筆)
- (2) 分給 3 個小朋友，每人至多 2 枝

解 (1) 從 8 人中選 5 人各給 1 枝， $\therefore C_5^8 = 56$ (種)

$$(2) 5 = 2 + 2 + 1, \text{ 即由 3 人中選 2 人各給 2 枝, } \therefore C_2^3 = 3 \text{ (種)}$$

例題 7 綜合問題

羅老師打算從班上跑步比較快的 8 名男生、6 名女生中，各選出 2 名參加運動會的 400 公尺接力賽，試求：

- (1) 若隨機安排為第一棒至第四棒，共有幾種選手名單？
- (2) 若男生安排為第一棒與第四棒，女生安排為第二、三棒，共有幾種選手名單？

解 從 8 名男生選 2 人， $C_2^8 = 28$

從 6 名女生選 2 人， $C_2^6 = 15$

$$(1) \text{ 隨機安排的方法數 } P_4^4 = 4! = 24 \quad \therefore 28 \times 15 \times 24 = 10080 \text{ (種)}$$

$$(2) \text{ 男生排序有 } 2! \text{ 種, 女生也有 } 2! \text{ 種} \quad \therefore 28 \times 15 \times 2! \times 2! = 1680 \text{ (種)}$$

例題 8 二項式定理(一)

- (1) 試求 $(x+y)^7$ 展開後， x^5y^2 項的係數
- (2) 試求 $(x-y)^5$ 展開後， x^2y^3 項的係數

解 (1) $(x+y)^7$ 的 x^5y^2 項為 $C_2^7 x^5 y^2$ \therefore 係數為 $C_2^7 = 21$

$$(2) (x-y)^5 = [x + (-y)]^5$$

$$x^2y^3 \text{ 項為 } C_3^5 x^2 (-y)^3 = -C_3^5 x^2 y^3 \quad \therefore \text{係數為 } -C_3^5 = -10$$

例題 9 二項式定理(二)

- (1) 試求 $(2x+y)^5$ 展開後， x^3y^2 項的係數
 (2) 試求 $(3x-2y)^3$ 展開後， xy^2 項的係數

解 (1) $(2x+y)^5$ 的 x^3y^2 項為 $C_2^5(2x)^3y^2 = 2^3C_2^5x^3y^2$ \therefore 係數為 $8 \times C_2^5 = 8 \times 10 = 80$

$$(2) (3x-2y)^3 = [3x + (-2y)]^3$$

$$xy^2 \text{ 項為 } C_2^3(3x)(-2y)^2 = 3(-2)^2C_2^3xy^2 \quad \therefore \text{係數為 } 3 \times 4 \times C_2^3 = 3 \times 4 \times 3 = 36$$

例題 10 巴斯卡三角形

某教練打算從甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛等 8 人中挑選 5 人參加籃球比賽，試求：

- (1) 若任意挑選，有幾種方法？
 (2) 假設不選甲有 m 種方法，必選甲有 n 種方法，則數對 $(m, n) = ?$

解 (1) $C_5^8 = 56$ (種)

$$(2) \text{ 不選甲，由其餘 7 人選 5 人 } \Rightarrow m = C_5^7 = 21$$

$$\text{必選甲，由其餘 7 人選 4 人 } \Rightarrow n = C_4^7 = 35$$

$$\therefore \text{數對 } (m, n) = (21, 35)$$

說明：本題可藉由(1)(2)小題 $C_5^8 = C_4^7 + C_5^7$ 驗證巴斯卡公式 $C_k^n = C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1}$