

習題 2-1 解答

一、基本題

1. 設 $a > 0$ ，試問下列哪些是指數函數 $f(x) = a^x$ 的特性？

- (A) 函數圖形通過點 $(0, -1)$
- (B) 是一嚴格遞增函數
- (C) 當 x 愈大時， $f(x)$ 值愈接近 x 軸
- (D) 函數圖形與任一水平線 $y=k$ 都恰有一交點
- (E) 函數圖形與任一鉛直線 $x=h$ 都恰有一交點

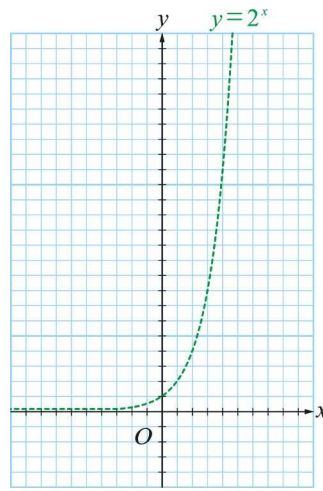
解 (A) \times : $f(0) = a^0 = 1$ ，故通過 $(0, 1)$
 (B) \times : 當 $0 < a < 1$ 時，圖形為嚴格遞減
 (C) \times : 若 $a > 1$ 時， x 值愈大，函數值也愈大
 (D) \times : 若 $a > 1$ ， $y=k$ (k 為負數) 與 $y=f(x)$ 的函數圖形沒交點
 若 $0 < a < 1$ ， $y=k$ (k 為負數) 與 $y=f(x)$ 的函數圖形沒交點
 (E) \circ : $x=h$ 與 $y=f(x)$ 圖形交於點 (h, a^h)
 故選(E)

2. 設 $0 < a < 1$ ，試問下列哪些是指數函數 $f(x) = a^x$ 的特性？

- (A) 函數圖形通過點 $(0, -1)$
- (B) 是一嚴格遞增函數
- (C) 當 x 愈大時， $f(x)$ 值愈接近 x 軸
- (D) 函數圖形與任一水平線 $y=k$ 都恰有一交點
- (E) 函數圖形與任一鉛直線 $x=h$ 都恰有一交點

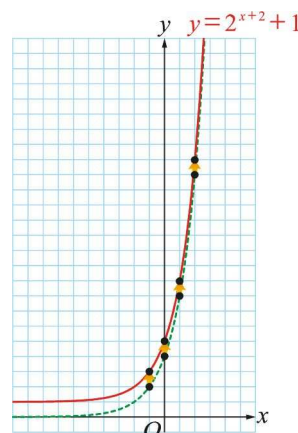
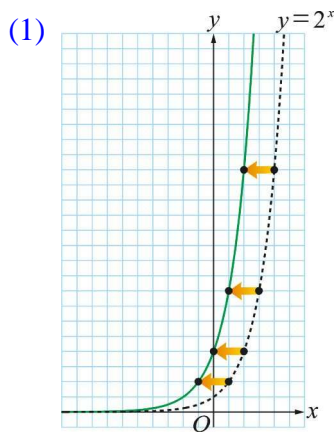
解 (A) \times : $\because a^0 = 1 \neq -1 \therefore$ 圖形不通過 $(0, -1)$
 (B) \times
 (C) \circ
 (D) \times : 當 $k < 0$ 時，例如 $y = -1$ 與圖形無交點
 (E) \circ : 當 $x=h$ 時， $a^x = a^h$ ，圖形交於 (h, a^h)
 故選(C)(E)

3. (1) 試利用 $y=2^x$ 的函數圖形，向左平移 2 單位，再向上平移 1 單位，畫出此函數圖形。



(2) 試求此函數

解



$$(2) y=2^x \xrightarrow{\text{向左平移 2 單位}} y=2^{x+2} \xrightarrow{\text{向上平移 1 單位}} y=2^{x+2}+1$$

4. 試解下列方程式或不等式：

(1) $5 \cdot 2^{x+1} = 40$

(2) $7^{-x+3} < \frac{1}{49}$

解

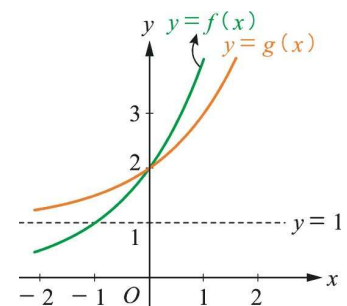
(1) 原式可得 $2^{x+1} = \frac{40}{5} = 8 = 2^3$,

故 $x+1=3$, 解得 $x=2$

(2) $7^{-x+3} < 7^{-2}$,

故 $-x+3 < -2$, 得 $x > 5$

5. 已知 $f(x) = a \cdot 2^x + b$, $g(x) = c \cdot 2^x + d$, 試比較 a 與 c , b 與 d 的大小關係。



解

當 x 值愈小時, $f(x)$ 值愈接近 0, $g(x)$ 值愈接近 1,
故 $b=0$, $d=1$ 。

$y=f(x)$ 及 $y=g(x)$ 皆通過 $(0, 2)$,

故 $f(0) = 2$, 且 $g(0) = 2$,

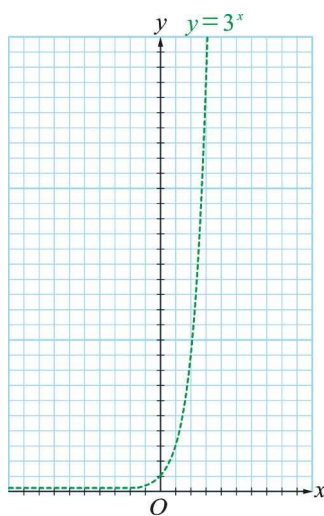
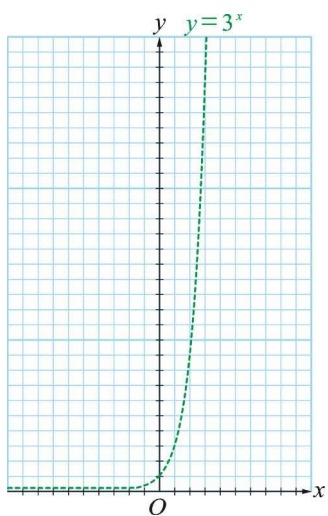
即 $a \cdot 2^0 + 0 = 2 = c \cdot 2^0 + 1$,

因此 $a=2$, $c=1$, 故 $a > c$, $b < d$

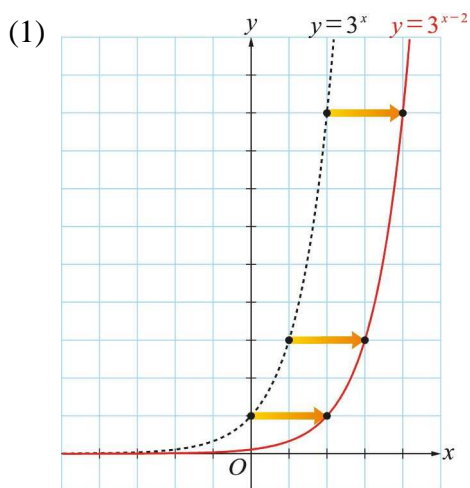
6. 試利用 $y=3^x$ 的圖形，畫出下列圖形：

(1) $y=3^{x-2}$

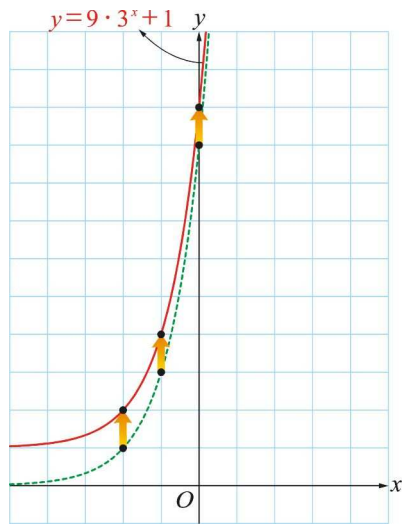
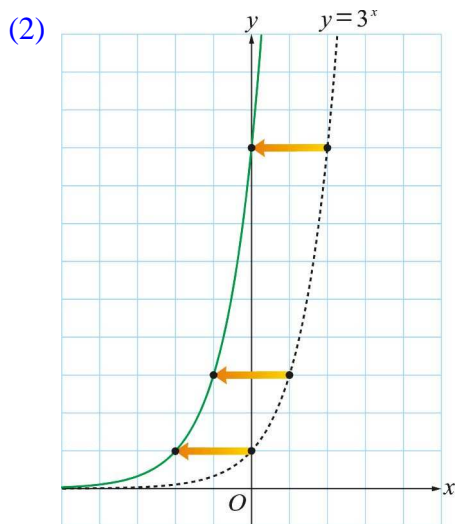
(2) $y=9 \cdot 3^x + 1$



解



$y=3^x$ 向右平移 2 單位 $\rightarrow y=3^{x-2}$ 。



$y=3^x$ 向左平移 2 單位 $\rightarrow y=3^{x+2}=9 \cdot 3^x$ 向上平移 1 單位 $\rightarrow y=9 \cdot 3^x + 1$

二、進階題

7. 設指數函數 $y=a^x$ 的圖形上有三點 (p, q) , (r, s) , (u, v) 。已知 $r-p=2$, $u-r=3$, 且 $s=9q$ 。試求 $\frac{v}{s}$ 之值。

解 因為 (p, q) , (r, s) , (u, v) 皆在 $y=a^x$ 的圖形上, 故 $q=a^p$, $s=a^r$, $v=a^u$,
 由 $s=9q$ 知 $a^r=9 \cdot a^p$, 故 $a^{r-p}=9=3^2$ 。
 因此, 由 $r-p=2$ 知 $a^2=3^2$, 得 $a=3$,
 所以 $\frac{v}{s} = \frac{a^u}{a^r} = a^{u-r} = 3^3 = 27$

8. 試解下列方程式或不等式：

(1) $6^x - 2 \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x + 18 = 0$

(2) $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 < 0$

解 (1) 原方程式化為
 $2^x \cdot 3^x - 2 \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x + 18 = 0$,
 故 $(2^x - 2)(3^x - 9) = 0$,
 得 $2^x = 2$ 或 $3^x = 9$,
 解得 $x=1$ 或 $x=2$

(2) 原不等式化為
 $(2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 8 < 0$,
 故 $(2^x - 1)(2^x - 8) < 0$,
 得 $1 < 2^x < 8$, 則 $2^0 < 2^x < 2^3$,
 即 $0 < x < 3$

9. 將某一冷凍食品從冷凍庫取出, 放在 25°C 的室溫下解凍, 放置 x 小時後, 食品的溫度變為 $f(x) = 25 - 32 \cdot a^x$ ($^\circ\text{C}$), 其中 a 是常數。根據經驗, 食品在解凍 1 小時後的溫度為 9°C , 試問解凍 3 小時後, 溫度變為幾 $^\circ\text{C}$?



解 依題意 $f(1) = 9$,
 故 $25 - 32 \cdot a^1 = 9$,
 得 $32a = 16$, 即 $a = \frac{1}{2}$,
 因此 $f(3) = 25 - 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 21$,
 故 3 小時後溫度為 21°C

三、挑戰題

10. 在沒有計算機的輔助下，利用本節所學，試比較 1 ， $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{4}}$ ， $\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{4}}$ ， $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$ ， $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$ 的大小

解

$$\text{因為 } \frac{1}{8} < \frac{1}{7}, \text{ 故 } \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{4}} < \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{4}} < \left(\frac{1}{7}\right)^0 = 1 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{又 } \frac{1}{8} < \frac{1}{5}, \text{ 故 } \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} < \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}} \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

比較 $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{4}}$ 與 $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{12}{4}} = \left(\frac{1}{8}\right)^3 = \frac{1}{512},$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{12}{3}} = \left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{1}{625},$$

$$\text{故由 } \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{12}{3}} < \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{12}{4}} \text{ 可得 } \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}} < \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{4}} \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

綜合①，②，③ 可得

$$1 > \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{4}} > \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{4}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$$