台北區 103 學年度 學科能力測驗 第 3 次 模擬考試　103.12

第壹部份：選擇題(占 60 分)

一、單選題(占 25 分)

說明：第 1 題至第 5 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是最適當的選項，畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」，各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1.下列何者為無理數？

(1) 3.1415　(2) $1.\bar{3}$　(3)方程式 $x^2=3$ 的根　(4) $\sin 15°\times\cos 15°$　(5) $(\log_5\frac{5}{2})+(\log_5 10)$

解：(1) $3.1415=\frac{31415}{10000}$，故小數為有理數，(2)因為 $1.\bar{3}=1+\frac{3}{9}=\frac{4}{3}$，故循環小數為有理數

(3) $x^2=3$，得知 $x=\sqrt{3}$，$-\sqrt{3}$，為無理數

(4) $\sin 15°\times\cos 15°=\frac{1}{2}\sin 30°=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ 為有理數

或 $\sin 15°\times\cos 15°=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{4}$ 為有理數

(5) $(\log_5\frac{5}{2})+(\log_5 10)=\log_5(\frac{5}{2}\times 10)=\log_5 25=\log_5 5^2=2$ 為有理數

答：(3)

出處：第一冊(數與式、指對數)，第二冊(三角函數)

2.設二次實係數多項式函數 $f(x)=ax^2-4ax+b$ 在區間 $1\le x\le 5$ 上的最大值為 12、最小值為 -6。已知 $a<0$，則 b 的值為下列何者？

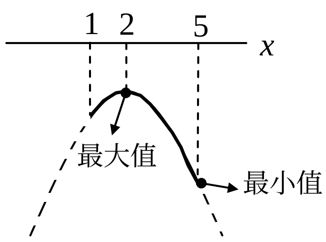
(1) 9　(2) 4　(3) 2　(4) -9　(5) -12

解：$f(x)=ax^2-4ax+b=a(x^2-4x+2^2)+(b-4a)=a(x-2)^2+(b-4a)$，如右圖

當 $x=2$ 時為最大值 $f(2)=b-4a=12$

當 $x=5$ 時為最小值 $f(5)=a(5-2)^2+(b-4a)=5a+b=-6$

$\Rightarrow$解 $\begin{cases}b-4a=12\\ b+5a=-6\end{cases}$，得知 $\begin{cases}a=-2\\ b=4\end{cases}$



答：(2)

出處：第一冊(多項式函數)

3.李浩餅舖因不慎購買了餿水油製作店內商品，為挽回誠信，接受顧客憑發票退費。今顧客傑哥拿發票前往店家退費時，發現發票上各產品的數量已模糊不清，僅知總消費金額為 500 元，且餅舖只販售芝麻肉餅、綠豆凸、紅豆餡餅與蛋黃酥四種商品。已知芝麻肉餅一盒為 200 元，綠豆凸、紅豆餡餅與蛋黃酥一盒均為 100 元，試問傑哥在購買商品時，有幾種可能組合？

(1) 13 種　(2) 21 種　(3) 24 種　(4) 34 種　(5) 56 種

解：設芝麻肉餅、綠豆凸、紅豆餡餅、蛋黃酥各買 a、b、c、d 盒，其中 a、b、c、d 為正整數或 0

根據題意，得 $200a+100(b+c+d)=500$，$\Rightarrow 2a+b+c+d=5$，其解

當 $a=0$ 時，$b+c+d=5$，非負整數解有 $H^3_5=C^7_5=21$ 種

當 $a=1$ 時，$b+c+d=3$，非負整數解有 $H^3_3=C^5_3=10$ 種

當 $a=2$ 時，$b+c+d=1$，非負整數解有 $H^3_1=C^3_1=3$ 種

$\therefore$共有 $21+10+3=34$ 種

答：(4)

出處：第二冊(排列組合)

4.若 $1-\frac{1}{4}C^n_1+(\frac{1}{4})^2C^n_2-(\frac{1}{4})^3C^n_3+\cdots+(\frac{1}{4})^nC^n_n<\frac{1}{1000}$，則滿足左式的最小正整數 n 為下列何數？

(1) 21　(2) 22　(3) 23　(4) 24　(5) 25

解：根據二項式公式 $1-\frac{1}{4}C_1^n+(\frac{1}{4})^2C_2^n-(\frac{1}{4})^3C_3^n+\cdots+(\frac{1}{4})^nC_n^n=(1-\frac{1}{4})^n=(\frac{3}{4})^n$，$\Rightarrow(\frac{3}{4})^n<\frac{1}{1000}$

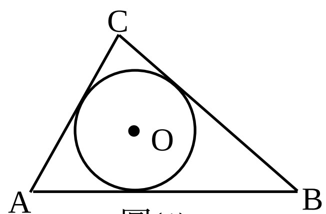
$\Rightarrow$取 $\log(\frac{3}{4})^n<\log(\frac{1}{1000})$，$\Rightarrow n(\log 3-\log 4)<-3$，$\Rightarrow n\,(0.4771-0.6020)<-3$

$\Rightarrow n\,(-0.1249)<-3$，$\Rightarrow n>\frac{3}{0.1249}\approx 24.02$，∴取最小正整數 $n=25$

答：(5)

出處：第二冊(排列組合)

5.如圖(1)，已知ΔABC 中，$\overline{AB}>\overline{AC}$，且 O 為$\Delta$ABC 內切圓的圓心，則下列何者正確？



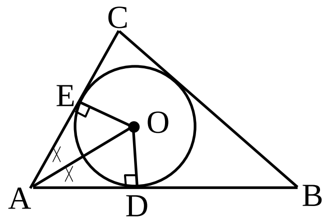
圖(1)

(1)$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$ (2)$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}>\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}$

(3)$\overrightarrow{AO}$在$\overrightarrow{AB}$上的正射影長度大於$\overrightarrow{AO}$在$\overrightarrow{AC}$上的正射影長度

(4)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\geq\overline{AB}\times\overline{AC}$ (5)若$\overline{AB}:\overline{AC}=3:2$，則$\overrightarrow{AO}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

解：(1)$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$成立時，O 為重心，但是題意 O 為內心



(2)如右下圖，連接$\overline{AO}$，∵O 為內心，∴$\angle OAE=\angle OAD$

$\Rightarrow\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AB}|\cos(\angle OAD)$，$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AC}|\cos(\angle OAE)$

∵$\overline{AB}>\overline{AC}$，即$|\overrightarrow{AB}|>|\overrightarrow{AC}|$，$\Rightarrow\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}>\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}$

(3)作$\overline{OD}\perp\overline{AB}$於 D，作$\overline{OE}\perp\overline{AC}$於 E，$\Rightarrow\overline{AD}=\overline{AE}$（由$\Delta OAD\cong\Delta OAE$ 或$\overline{AD}$、$\overline{AE}$皆為切線)

$\Rightarrow\overrightarrow{AO}$在$\overrightarrow{AB}$上的正射影長度$=\overline{AD}=\overline{AE}=\overrightarrow{AO}$在$\overrightarrow{AC}$上的正射影長度

(4)∵$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos(\angle BAC)<\overline{AB}\times\overline{AC}$ （∵$\cos(\angle BAC)<1$)

(5)若$\overrightarrow{AO}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$，得知因$\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=1$，故 O，C，B 三點共線，但是 O 在$\Delta$ABC 之內部

即$\overrightarrow{AO}<\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

答：(2)

出處：第三冊(向量)

二、多選題(占 35 分)

說明：第 6 題至第 12 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

6.已知 $f(x)=x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ 為一個實係數多項式，則下列敘述哪些正確？

(1)若 $x-5$ 能整除 $f(x)$，則 5 能整除 a_0 (2)若 $f(2)f(3)>0$，則 $f(x)=0$ 在 2 與 3 之間沒有實根

(3)若 $a_0=0$，則 $f(x)=0$ 至少有一實根 (4)若 $1+2i$ 為 $f(x)=0$ 之一根，則 $f(1-2i)=0$

(5)若 x^4-2x^2-3 能整除 $f(x)$，則 $f(x)=0$ 必存在有理根

解：(1)牛頓定理必須在整係數多項式才成立

(2)若 $f(2)f(3)>0$，則 $f(x)=0$ 在 2 與 3 之間可能有 0，2，4，…等偶數個實數根

(3)若 $a_0=0$，則 $f(x)=x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x=x(x^5+a_5x^4+a_4x^3+a_3x^2+a_2x+a_1)=0$，有一實根 $x=0$

(4)根據實係數多項式虛根成雙性質，得知 $f(1-2i)=0$

(5)若 x^4-2x^2-3 能整除 $f(x)$，$\Rightarrow$設 $f(x)=(x^4-2x^2-3)(ax^2+bx+c)=(x^2-3)(x^2+1)(ax^2+bx+c)=0$

得知 $x=\sqrt{3}$，$-\sqrt{3}$，i，$-i$ 等皆不為有理根，而 $ax^2+bx+c=0$ 也無法得知 x 是否為有理根

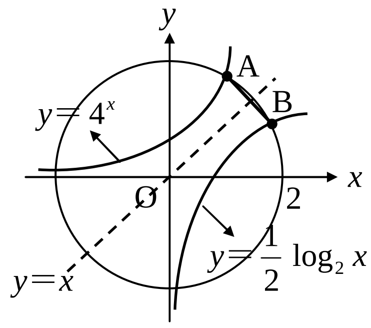
答：(3)(4)

出處：第一冊(多項式函數)

7.在坐標平面上，圓 C 是圓心在原點且半徑為 2 的圓。若在第一象限中，此圓與 $y=4^x$ 和 $y=\frac{1}{2}\log_2 x$ 的圖形分別交於點 A$(x_1，y_1)$和點 B$(x_2，y_2)$，則下列敘述哪些正確？

(1) $x_1^2+y_1^2=4$　　(2) $y_1<2$　　(3) $x_1>\frac{1}{2}$　　(4) $x_1+y_1>x_2+y_2$　　(5)直線 AB 的斜率小於-1

解：根據題意，作圖如右：



(1) A$(x_1，y_1)$在圓 C：$x^2+y^2=4$ 上，$\therefore x_1^2+y_1^2=4$

(2) $\because x_1>0$，$\therefore y_1<2$

(3) $y_1=4^{x_1}<2$，$\Rightarrow 2^{2x_1}<2$，$\Rightarrow 2x_1<1$，得知 $x_1<\frac{1}{2}$

(4) $y=4^x$ 與 $y=\frac{1}{2}\log_2 x=\log_4 x$ 對稱於直線 $y=x$，

即 $x_1=y_2$，$y_1=x_2$，$\Rightarrow x_1+y_1=x_2+y_2$

(5)直線 AB 垂直於直線 $y=x$，$\Rightarrow$直線 AB 的斜率等於-1

答：(1)(2)

出處：第一冊(指數與對數)

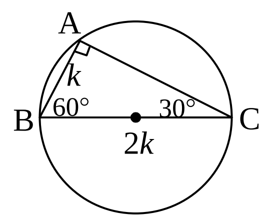
8.已知ΔABC 中，$\overline{BC}=2\overline{AB}$，且ΔABC 的外接圓直徑恰與$\overline{BC}$等長。D 為ΔABC 外接圓上異於 A、B、C 的點，下列敘述哪些正確？

(1) ΔABC 面積等於$\frac{1}{4}\overline{BC}\times\overline{AC}$　　(2)不論 D 點在圓上何處，$\cos\angle ADC$ 恆為$\frac{1}{2}$

(3)若 B 點的極坐標為[1，30°]，且ΔABC 的外接圓圓心在原點，則 C 點的極坐標可為[1，210°]

(4) $\cos\angle ABD=\cos\angle ACD$　　(5) $\sin\angle ABD=\sin\angle ACD$

解：(1)根據題意作圖(i)如右，$\overline{BC}$為直徑，得$\angle BAC=90°$，且$\overline{AB}=\frac{1}{2}\overline{BC}$



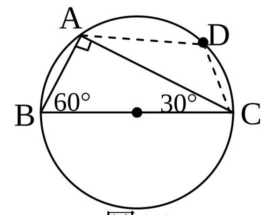
圖(i)

$\Rightarrow$ΔABC 面積$=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AC}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\overline{BC})\times\overline{AC}=\frac{1}{4}\overline{BC}\times\overline{AC}$

(2)設 D 點如右圖(ii)

$\because$弧 ADC$=2\angle B=120°$，$\therefore$弧 ABC$=240°$

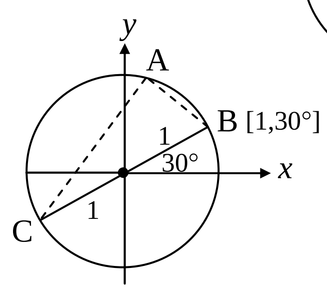
$\Rightarrow\cos\angle ADC=\cos 240°=-\frac{1}{2}$



圖(ii)

(3) B 點的極坐標為[1，30°]，如右圖(iii)

$\Rightarrow$ C 點的極坐標可為[1，210°]



圖(iii)

(4)如右圖(iv)、(v)

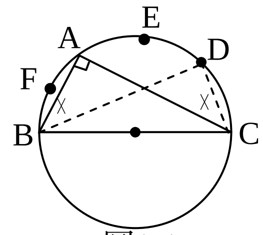
(a)若 D 點在弧 AEC 間，$\angle ABD=\frac{1}{2}$(弧 AED)$=\angle ACD$

若 D 點在弧 AFB 間，$\angle ABD=\angle ACD$

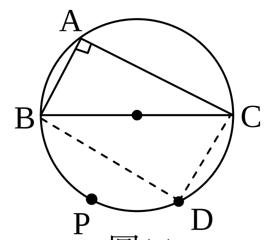
$\Rightarrow\cos\angle ABD=\cos\angle ACD$，$\sin\angle ABD=\sin\angle ACD$

(b)若 D 點在弧 BPC 間，$\angle ABD+\angle ACD=180°$

$\Rightarrow\cos\angle ABD=-\cos\angle ACD$，$\sin\angle ABD=\sin\angle ACD$



圖(iv)



圖(v)

答：(1)(3)(5)

出處：第三冊(圓)

9.試就下列各給定條件，判斷關於二次曲線的敘述，哪些正確？

(1)方程式$|x-2|=\sqrt{(x+4)^2+(y-1)^2}$所表圖形為一個拋物線

(2)方程式$\left|\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}-\sqrt{(x-5)^2+(y+6)^2}\right|=10$ 所表圖形為一個雙曲線

(3)若 P 為雙曲線$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 上的一點，已知 F_1 與 F2 為該雙曲線的兩焦點，且$\overline{PF_1}:\overline{PF_2}=1:4$，

則ΔPF_1F_2 的周長必為 20

(4)雙曲線$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{2}=1$與橢圓$\dfrac{x^2}{14}+\dfrac{y^2}{3}=1$有共同的焦點

(5) $x^2-4y^2-2x-16y-19=0$ 的漸近線斜率為± 2

解：(1)方程式$|x-2|=\sqrt{(x+4)^2+(y-1)^2}$，$\Rightarrow d(\text{P}(x,\ y),\ \text{L}：x-2=0)=d(\text{P}(x,\ y),\ \text{F}(-4,\ 1))$

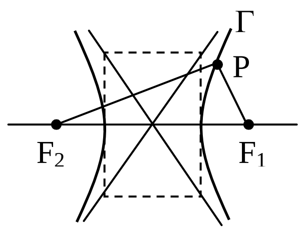
$\because$焦點 F(−4, 1)不在準線 L：$x-2=0$ 上，符合拋物線定義

(2)若方程式$\left|\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}-\sqrt{(x-5)^2+(y+6)^2}\right|=10$ 為雙曲線，$\Rightarrow$得知 $2a=10$

又兩焦點 $\text{F}_1(-1,\ 2)$，$\text{F}_2(5,\ -6)$，得知 $2c=\overline{\text{F}_1\text{F}_2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$

$\Rightarrow 2a=10=2c$，圖形為兩射線，不是雙曲線

(3)根據題意，雙曲線$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$，且$\overline{\text{PF}_1}：\overline{\text{PF}_2}=1：4$，如右圖



$\Rightarrow a^2=9$，$\therefore a=3$，$b^2=16$，$\therefore b=4$，得 $c=5$，$\Rightarrow \overline{\text{F}_1\text{F}_2}=2c=10$

又由定義$|\overline{\text{PF}_1}-\overline{\text{PF}_2}|=\overline{\text{PF}_2}-\overline{\text{PF}_1}=2a=6$

令$\overline{\text{PF}_2}=4k$，$\overline{\text{PF}_1}=k$，$\Rightarrow 3k=6$，$\therefore k=2$，$\Rightarrow$ 得知 $\overline{\text{PF}_2}=8$，$\overline{\text{PF}_1}=2$

$\Rightarrow \Delta\text{PF}_1\text{F}_2$ 的周長$=\overline{\text{PF}_1}+\overline{\text{PF}_2}+\overline{\text{F}_1\text{F}_2}=2+8+10=20$

(4)雙曲線$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{2}=1$中，$\because c^2=9+2=11$，$\therefore c=\sqrt{11}$，$\Rightarrow$焦點為$(\sqrt{11},\ 0)$，$(-\sqrt{11},\ 0)$

橢圓$\dfrac{x^2}{14}+\dfrac{y^2}{3}=1$中，$\because c^2=14-3=11$，$\therefore c=\sqrt{11}$，$\Rightarrow$焦點為$(\sqrt{11},\ 0)$，$(-\sqrt{11},\ 0)$

$\therefore$焦點相同

(5)方程式 $x^2-4y^2-2x-16y-19=0$，配方為$(x-1)^2-4(y+2)^2=4$，$\Rightarrow \dfrac{(x-1)^2}{4}-\dfrac{(y+2)^2}{1}=1$ 為一雙曲線

由$\dfrac{(x-1)^2}{4}-\dfrac{(y+2)^2}{1}=0$，$\Rightarrow [(x-1)-2(y+2)][(x-1)+2(y+2)]=0$，$\Rightarrow (x-2y-5)(x+2y+3)=0$

$\Rightarrow$漸近線方程式為 $x-2y-5=0$，$x+2y+3=0$，$\Rightarrow$其斜率分別為$\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{2}$

答：(1)(3)(4)

出處：第四冊(二次曲線)

10.某班期末考數學科成績x_i的算術平均數μ_x為 36 分，標準差σ_x為 9 分。因為成績太低，數學老師想替每位同學加分，提出了三個方案：(每種方式加分後沒有超過 100 分的情形)

方案一：每個人都以$y_i=\dfrac{3}{2}x_i+6$ 方式加分

方案二：每個人都以$z_i=10\sqrt{x_i}$ 方式加分

方案三：每個人都以$w_i=x_i+24$ 方式加分

則下列敘述哪些正確？

(1)無論採取何種方案加分，加分後的平均都為 60 分

(2)採取方案二，加分後的標準差σ_x為 30 分

(3)採取方案一，所得成績的標準差為σ_y；採取方案三，所得成績的標準差為σ_w；則$\sigma_y>\sigma_w$

(4)採取方案一所得成績與原始成績的相關係數為r_{xy}；採取方案三所得成績與原始成績的相關係數為r_{xw}；則$r_{xy}=r_{xw}$

(5)方案一成績y_i對原始成績x_i的迴歸直線，和方案三成績w_i的迴歸直線相同

解：(1)方案一：$y_i=\dfrac{3}{2}x_i+6$，$\Rightarrow$平均數$\mu_y=\dfrac{3}{2}\mu_x+6=\dfrac{3}{2}(36)+6=60$

方案二：$z_i=10\sqrt{x_i}$ 不是線性變換關係，$\Rightarrow$平均數$\mu_z=10\sqrt{\mu_x}$ 未必正確

方案三：$w_i=x_i+24$，$\Rightarrow$平均數$\mu_w=\mu_x+24=36+24=60$

(2)方案二：$z_i=10\sqrt{x_i}$ 不是線性變換關係，$\Rightarrow \sigma_z=10\sqrt{\sigma_x}$ 未必正確

(3)方案一：$y_i = \frac{3}{2}x_i + 6$，$\Rightarrow$標準差$\sigma_y = \frac{3}{2}\sigma_x = \frac{3}{2}\times 9 = \frac{27}{2}$

方案三：$w_i = x_i + 24$，$\Rightarrow$標準差$\sigma_w = \sigma_x = 9$

$\Rightarrow \sigma_y > \sigma_w$

(4)方案一：$r_{xy} = r_{(x,\frac{3}{2}x+6)} = r_{(x,x)} = 1$；方案三：$r_{xw} = r_{(x,x+24)} = r_{(x,x)} = 1$，$\Rightarrow \therefore r_{xy} = r_{xw}$

(5)方案一：y 對 x 的迴歸直線為 $y = m_{xy}x + b_{xy}$，其中斜率 $m_{xy} = r_{xy}\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$

方案三：w 對 x 的迴歸直線為 $y = m_{xw}x + b_{xw}$，其中斜率 $m_{xw} = r_{xw}\cdot\frac{\sigma_w}{\sigma_x}$

$\because r_{xy} = r_{xw}$，但是$\sigma_y = \frac{27}{2} \neq \sigma_w = 9$，$\Rightarrow$迴歸直線不相同

答：(3)(4)

出處：第二冊(數據分析)

11.裡常熔化工廠欲建立一新的丙烯輸送管線。今使用電腦軟體模擬管線的空間配置，並以某儲藏槽為空間坐標的原點，且原有的管線和牆面分別以空間中的直線與平面表示(在電腦中，管線與牆面厚度不計)。已知新的管線為通過(2，1，－2)、(3，2，0)兩點的直線，若原有的管線及牆面與新管線不相交，則可保留。試問下列哪些原有的管線或牆面是可以保留的？

(1) $x+y+2z-5=0$　(2) $2x+4y-3z-14=0$　(3) $x+y-z-4=0$

(4) $\begin{cases} x+y+2z=2 \\ 3x-y+2z=2 \end{cases}$　(5) $\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$

解：根據題意，設通過 A(2，1，－2)、B(3，2，0)兩點的直線為 L，取方向向量$\vec{d} = \overrightarrow{AB} = (1, 1, 2)$

則其參數式為 L：$\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+t \\ z = -2+2t \end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$

(1)將 L 之代入 $x+y+2z-5=(2+t)+(1+t)+2(-2+2t)-5=0$，得 $t=1$，$\therefore x=3$，$y=2$，$z=0$

即直線 L 與(1)相交於點(3，2，0)，$\Rightarrow$不保留

(2)將 L 之代入 $2x+4y-3z-14=2(2+t)+4(1+t)-3(-2+2t)-14=0$，得 $t=$任意數

即直線 L 在(2)平面 $2x+4y-3z-14=0$ 上，$\Rightarrow$不保留

(3)將 L 之代入 $x+y-z-4=(2+t)+(1+t)+(-2+2t)-4=0$，得 t 為無解，即不相交，$\Rightarrow$保留

(4)將 L 之代入 $x+y+2z-2=(2+t)+(1+t)+2(-2+2t)-2=0$，得 $t=\frac{1}{2}$

將 L 之代入 $3x-y+2z-2=3(2+t)-(1+t)+2(-2+2t)-2=0$，得 $t=\frac{1}{6}$

$\because t$ 值不同，即不相交，$\Rightarrow$保留

另解：由(1，1，2)×(3，－1，2)＝(6，4，－3)與(1，1，2)不平行，$\therefore$不相交，$\Rightarrow$保留

(5)令$\frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1} = k$，$\Rightarrow \begin{cases} x=3+k \\ y=2+k \\ z=-3-k \end{cases}$ 與 $\begin{cases} x=2+t \\ y=1+t \\ z=-2+2t \end{cases}$ 求解，$\Rightarrow \begin{cases} x=3+k=2+t \\ y=2+k=1+t \\ z=-3-k=-2+2t \end{cases}$，得$\begin{cases} t=0 \\ k=-1 \end{cases}$

$\Rightarrow t=0$ 時，$\therefore x=2$，$y=1$，$z=-2$，即相交於(2，1，－2)，$\therefore$相交，$\Rightarrow$不保留

答：(3)(4)

出處：第四冊(空間中直線)

12.某市即將舉辦市長選舉，民調公司根據選前半年的民調指出，有 3 成的民眾會投票給候選人柯南，有 5 成民眾會投票給候選人金田一，有 2 成民眾不願表態。已知兩位候選人在選前恰有多次同日發表競選廣告，且民調公司只在兩位候選人同日發表競選廣告隔天才會實施民調。民調公司發現只要兩位候選人每次在同日發表競選廣告後，民調結果必有以下改變：

(i)原本支持候選人柯南的民眾有 6 成仍支持柯南，有 3 成轉而支持候選人金田一，有 1 成不願表態

(ii)原本支持候選人金田一的民眾有 5 成仍支持金田一，有 2 成轉而支持候選人柯南，有 3 成不願表態

(iii)原本不願表態的民眾有 2 成仍不願表態，有 4 成轉而支持候選人柯南，有 4 成轉而支持候選人金田一

試就前述所給訊息，選出下列正確的選項：

(1)兩位候選人同日發表競選廣告後，矩陣$\begin{bmatrix}0.6 & 0.2 & 0.4\\0.3 & 0.5 & 0.4\\0.1 & 0.3 & 0.2\end{bmatrix}$可為其轉移矩陣

(2)兩位候選人在第一次同日發表競選廣告後，候選人柯南的民調會上升至 3 成 6

(3)兩位候選人在第一次同日發表競選廣告後，候選人金田一的民調會下降至 3 成 6

(4)兩位候選人在第二次同日發表競選廣告後，候選人柯南的民調結果較第一次發表時上升

(5)兩位候選人在多次同日發表競選廣告後，民調結果逐漸趨近穩定，此時候選人柯南的民調結果會高於候選人金田一的民調結果

解：(1)根據題意條件，列表如下：

變換前／變換後	柯南	金田一	不願表態
柯南	0.6	0.2	0.4
金田一	0.3	0.5	0.4
不願表態	0.1	0.3	0.2

∴矩陣$\begin{bmatrix}0.6 & 0.2 & 0.4\\0.3 & 0.5 & 0.4\\0.1 & 0.3 & 0.2\end{bmatrix}$可為其轉移矩陣

(2)令 $A=\begin{bmatrix}0.6 & 0.2 & 0.4\\0.3 & 0.5 & 0.4\\0.1 & 0.3 & 0.2\end{bmatrix}$，初始矩陣 $X_0=\begin{bmatrix}0.3\\0.5\\0.2\end{bmatrix}$，∴第一次：$X_1=A\,X_0=\begin{bmatrix}0.6 & 0.2 & 0.4\\0.3 & 0.5 & 0.4\\0.1 & 0.3 & 0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.3\\0.5\\0.2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.36\\0.42\\0.22\end{bmatrix}$

⇒柯南的民調會上升至 0.36 (3 成 6)

(3)由上式(2)得知金田一的民調會下降至 0.42 (4 成 2)

(4)第二次：$X_2=A\,X_1=\begin{bmatrix}0.6 & 0.2 & 0.4\\0.3 & 0.5 & 0.4\\0.1 & 0.3 & 0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.36\\0.42\\0.22\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.388\\0.406\\0.206\end{bmatrix}$，⇒柯南的民調較第一次(0.36)上升為(0.388)

(5)設趨近穩定狀態時，柯南的支持度為 x，金田一的支持度為 y，不願表態占$(1-x-y)$

根據馬可夫公式，⇒$\begin{bmatrix}0.6 & 0.2 & 0.4\\0.3 & 0.5 & 0.4\\0.1 & 0.3 & 0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\1-x-y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\1-x-y\end{bmatrix}$，得$\begin{cases}x=0.4\\y=0.4\\z=0.2\end{cases}$，⇒即民調結果為支持度相同(0.4)

答：(1)(2)(4)

出處：第四冊(矩陣)

第貳部份：選填題(占 40 分)

說明：1.第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(13－30)。 2.每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

A.設 k 為一整數，且 $\frac{k}{3}<\sqrt{7+\sqrt{48}}<\frac{k+1}{3}$，則 $k=$＿⑬⑭＿。

解：$\sqrt{7+\sqrt{48}}=\sqrt{7+2\sqrt{12}}=2+\sqrt{3}\approx 3.732$

$\Rightarrow k<3\sqrt{7+\sqrt{48}}<k+1$，$\Rightarrow k<11.196<k+1$，取 $k=11$

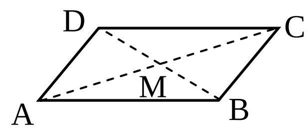
答：11

出處：第一冊(數與式)

B.平面上一平行四邊形 ABCD，且 A(1，2)、B(3，3)、D(4，5)，則平行四邊形 ABCD 的面積為＿⑮＿。

解：如右圖，$\overrightarrow{AB}=(2,1)$，$\overrightarrow{AD}=(3,3)$

$\Rightarrow$平行四邊形 ABCD 的面積$=\left|\begin{vmatrix}2&1\\3&3\end{vmatrix}\right|=|6-3|=3$



另解：設 C(x，y)，$\Rightarrow$B、D 之中點 M($\frac{7}{2}$，4)；A、C 之中點 M($\frac{1+x}{2}$，$\frac{2+y}{2}$)

$\Rightarrow \frac{7}{2}=\frac{1+x}{2}$，得 $x=6$；$4=\frac{2+y}{2}$，得 $y=6$

$\Rightarrow$平行四邊形 ABCD 的面積$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}1&3&6&4&1\\2&3&6&5&2\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|-3+0+6+3|=3$

答：3

出處：第三冊(平面向量)

C.小明和小美經常玩猜拳遊戲。已知小明是個懶惰鬼，所以出石頭的機率為$\frac{1}{2}$，出剪刀和布的機率一樣；而小美喜歡拍照，所以出剪刀的機率為$\frac{1}{2}$，出石頭和布的機率一樣；而且兩人出拳互不影響。今兩人猜拳一次，若已知小明獲勝，請問小明出石頭的機率為 $\frac{⑯}{⑰}$ 。(化成最簡分數)

解：根據題意，小明獲勝的情形為：

(1)小明出石頭，小美出剪刀，機率為$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(2)小明出剪刀，小美出布，機率為$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

(3)小明出布，小美石頭，機率為$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$

$\Rightarrow$P(小明出石頭 |小明獲勝)$=\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}=\frac{2}{3}$

答：$\frac{2}{3}$

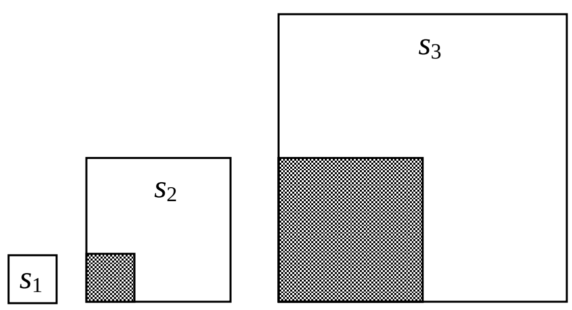
出處：第二冊(機率)

D.有 20 個由小到大的正方形，其邊長分別為a_1、a_2、…、a_{20}，而其面積分別為A_1、A_2、…、A_{20}。

已知各個正方形邊長滿足：$\begin{cases}a_1=1\\a_{n+1}=a_n+(n+1),(n=1,2,\cdots,19)\end{cases}$。

如圖(2)中的白色區域面積，定義一個數列$\langle s_k\rangle$滿足

$\begin{cases}s_1=A_1\\s_{k+1}=A_{k+1}-A_k,(k=1,2,\cdots,19)\end{cases}$，則 $s_{10}=$＿⑱⑲⑳㉑＿。



圖(2)

解：$a_1=1$，$A_1=1^2$

$a_2=a_1+(1+1)=1+2=3$，$A_2=3^2$

$a_3=a_2+(2+1)=1+2+3=6$，$A_3=6^2$

……

$a_9=1+2+\cdots+9=45$，$A_9=45^2$

$a_{10}=1+2+\cdots+10=55$，$A_{10}=55^2$

$\Rightarrow s_{10}=A_{10}-A_9=55^2-45^2=3025-2025=1000$

另解：$a_1=1$

$a_2=a_1+(1+1)=a_1+2$

$a_3=a_2+(2+1)=a_2+3$

……

$a_{n-1}=a_{n-2}+(n-2+1)=a_8+(n-1)$

$a_n=a_{n-1}+(n-1+1)=a_9+n$

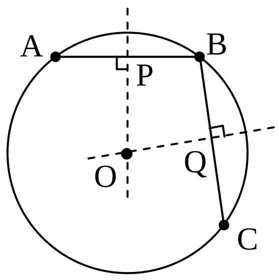
相加，$\Rightarrow a_n=1+2+\cdots\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，$A_n=(\dfrac{n(n+1)}{2})^2$

$\Rightarrow s_{10}=A_{10}-A_9=(\dfrac{10(11)}{2})^2-(\dfrac{9(10)}{2})^2=55^2-45^2=3025-2025=1000$

答：1000

出處：

E.已知圓上三點 A(0，3)、B(4，3)、C(6，1)，求此圓圓心與直線 $3x-4y-12=0$ 的距離為 $\dfrac{㉒}{㉓}$ 。(化成最簡分數)



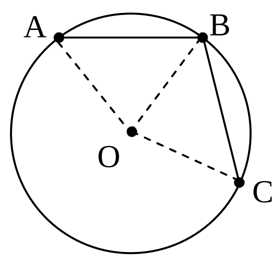
解：1.如右圖，設$\overline{AB}$，$\overline{BC}$的中點分別為 P(2，3)，Q(5，2)，O 為圓心

$\Rightarrow\overline{AB}$的斜率為 0，直線 OP 為鉛直線，$\Rightarrow$方程式為 $x=2$

$\overline{BC}$的斜率為-1，直線 OQ 方程式為 $\dfrac{y-2}{x-5}=1$，得 $y=x-3$

$\Rightarrow$圓心 O：$\begin{cases}x=2\\y=x-3\end{cases}$，$\therefore\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$，$\Rightarrow$圓心 O(2，$-1$)

2.圓心 O 與直線 $3x-4y-12=0$ 的距離$=d\,(O(2,-1),\ 3x-4y-12=0)=\dfrac{|6+4-12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{2}{5}$



另解：1.如右圖，設 O(h，k)為圓心，半徑為 r，$\therefore$半徑為 $r=\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$

$\Rightarrow r=\sqrt{(h-0)^2+(k-3)^2}=\sqrt{(h-4)^2+(k-3)^2}=\sqrt{(h-6)^2+(k-1)^2}$

$\Rightarrow -6k+9=-8h-6k+25=-12h-2k+37$

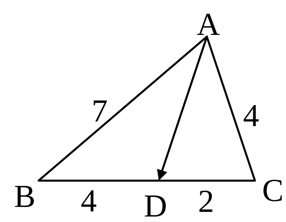
$\Rightarrow\begin{cases}-6k+9=-8h-6k+25\\-8h-6k+25=-12h-2k+37\end{cases}$，$\Rightarrow\begin{cases}8h=16\\4h-4k=12\end{cases}$，得$\begin{cases}h=2\\k=-1\end{cases}$，$\therefore$圓心 O(2，$-1$)

2.圓心 O 與直線 $3x-4y-12=0$ 的距離$=d\,(O(2,-1),\ 3x-4y-12=0)=\dfrac{|6+4-12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{2}{5}$

答：$\dfrac{2}{5}$

出處：第三冊(直線與圓)

F. ΔABC 中，已知 sinA：sinB：sinC＝6：4：7，$\overline{BC}=6$。若 D 在$\overline{BC}$上，且$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，則$\overline{AD}=\sqrt{㉔㉕}$ 。



解：1.由 sinA：sinB：sinC＝6：4：7，$\Rightarrow$設 sinA＝$6k$，sinB＝$4k$，sinC＝$7k$

$\Rightarrow$根據正弦定理：$\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin C}$，$\Rightarrow\dfrac{6}{6k}=\dfrac{AC}{4k}=\dfrac{AB}{7k}=\dfrac{1}{k}$，$\Rightarrow\overline{AC}=4$，$\overline{AB}=7$

2.如右圖，$\because\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，$\Rightarrow\overline{BD}:\overline{DC}=2:1$

又$\because\overline{BC}=6$，$\Rightarrow\overline{BD}=4$，$\overline{DC}=2$

3.設$\overline{AD}=x$，求$\overline{AD}$之方法：

法 1：在ΔABC 中，$\cos B=\dfrac{7^2+6^2-4^2}{2\cdot7\cdot6}=\dfrac{69}{2\cdot7\cdot6}$；在ΔABD 中，$\cos B=\dfrac{7^2+4^2-x^2}{2\cdot7\cdot4}=\dfrac{65-x^2}{2\cdot7\cdot4}$

$\Rightarrow \dfrac{69}{2\cdot7\cdot6}=\dfrac{65-x^2}{2\cdot7\cdot4}$，$\Rightarrow x^2=19$，$\therefore x=\overline{AD}=\sqrt{19}$

法 2：$\because \angle ADB+\angle ADC=180°$，$\therefore \cos\angle ADB=-\cos\angle ADC$

$\Rightarrow \dfrac{x^2+4^2-7^2}{2\cdot x\cdot 4}=-\dfrac{x^2+2^2-4^2}{2\cdot x\cdot 2}$，$\Rightarrow \therefore x=\overline{AD}=\sqrt{19}$

法 3：由$\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，$\Rightarrow |\overrightarrow{AD}|=|\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}|$

$\because \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A=\dfrac{7^2+4^2-6^2}{2}=\dfrac{29}{2}$

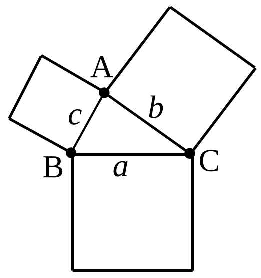
平方，$\Rightarrow |\overrightarrow{AD}|^2=|\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}|^2=\dfrac{1}{9}|\overrightarrow{AB}|^2+\dfrac{4}{9}|\overrightarrow{AC}|^2+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$x^2=\dfrac{1}{9}\times7^2+\dfrac{4}{9}\times4^2+\dfrac{4}{9}\times\dfrac{29}{2}=19$，$\Rightarrow x=\overline{AD}=\sqrt{19}$

答：$\sqrt{19}$

出處：第三冊(平面向量)

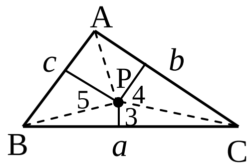
G.如圖(3)，三角形中∠A 的對邊長為 a、∠B 的對邊長為 b、∠C 的對邊長為 c，此三邊分別向外做一正方形，三個正方形的面積和為 100。若在ΔABC 的內部任取一點 P，使得 P 點到$\overline{BC}$ 的距離為 3，P 點到 $\overline{AC}$ 的距離為 4，P 點到 $\overline{AB}$ 的距離為 5，則ΔABC 最大面積為 ㉖㉗$\sqrt{㉘}$ 。(化成最簡根式)



圖(3)

解：1.由三邊各向外做一正方形三個正方形的面積和為 100，$\Rightarrow a^2+b^2+c^2=100$，如圖(3)

2.如右圖，ΔABC 的面積＝ΔABP＋ΔBCP＋ΔACP＝$\dfrac{3a+4b+5c}{2}$



3.利用柯西不等式(Cauchy's ineq.)

$(a^2+b^2+c^2)(3^2+4^2+5^2)\ge(3a+4b+5c)^2$

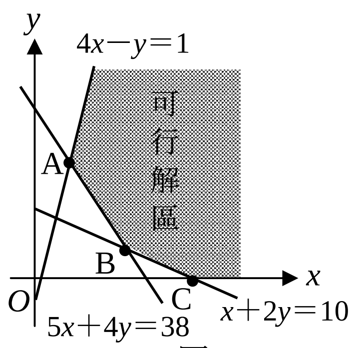
$\Rightarrow 100\times50\ge(3a+4b+5c)^2$，$\Rightarrow 3a+4b+5c\le\sqrt{100\times50}=50\sqrt{2}$

$\Rightarrow$得知ΔABC 的面積＝$\dfrac{3a+4b+5c}{2}\le25\sqrt{2}$，即ΔABC 最大面積為 $25\sqrt{2}$

答：$25\sqrt{2}$

出處：第三冊(平面向量，柯西不等式)

H.因為伊波拉病毒肆虐，國際衛生組織決定組成考察團，前往非洲山區做一日考察。今向專業遊覽車公司租用中小型休旅出前往，恰需租用 60 輛車，而遊覽車公司提供三種車型預租用價格如下表。考察團再根據各所需條件，假設 6 人座休旅車租用 x 輛，7 人座休旅車租用 y 輛，利用線性規劃得到如圖(4)中的可行解區域。當 6 人座休旅車租用 m 輛，7 人座休旅車租用 n 輛時，租車費用最高，則 m＝ ㉙ 、n＝ ㉚ 。



圖(4)

車型(不含司機)	每日每輛租車費
6 人座	1300 元
7 人座	1400 元
8 人座	1900 元

解：1.根據題意，6 人座租用 x 輛，7 人座租用 y 輛，⇒8 人座租用 $60-x-y$ 輛

$\Rightarrow$目標函數(租車費用)：$f(x, y)=1300x+1400y+1900(60-x-y)=114000-600x-500y$

2.由可行解區解出頂點 A(2，7)，B(6，2)，C(10，0)

頂點	A(2，7)	B(6，2)	C(10，0)
$f(x, y)$	109300	109400	108000

$\Rightarrow$當 B(6，2)時，有最大值，即當 $m=6$，$n=2$ 時，費用最高為 109400 元

答：$m=6$，$n=2$

出處：第三冊(直線與圓，線性規劃)