第 14 單元　二次曲線

1.平面上滿足 $\log(x^2+y^2-xy+1)+\log 6=\log(5x^2+2y^2-6xy+10)$之所有點$(x,\ y)$形成什麼圖形？(80 社會)

(1)二相交直線　(2)二平行直線　(3)拋物線　(4)雙曲線　(5)橢圓

解：左式$=\log(x^2+y^2-xy+1)+\log 6=\log 6(x^2+y^2-xy+1)=\log(5x^2+2y^2-6xy+10)$

$\Rightarrow 6(x^2+y^2-xy+1)=5x^2+2y^2-6xy+10$，$\Rightarrow x^2+4y^2=4$，$\therefore \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$，$\Rightarrow$圖形為橢圓

答：(5)

2.設 k 為實數，且 $y=x^2+kx+k$ 的圖形與直線 $y=x+1$ 沒有交點，則 k 的範圍為_____。(81 社會)

解：$\begin{cases} y=x^2+kx+k & \cdots\cdots(1) \\ y=x+1 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$，由(2)代入(1)，得 $x^2+(k-1)x+(k-1)=0$

$\because$沒有交點，$\therefore$判別式<0，$\Rightarrow (k-1)^2-4(k-1)<0$，$\Rightarrow (k-1)(k-5)<0$，$\Rightarrow 1<k<5$

答：$1<k<5$

3.已知一雙曲線的兩焦點與橢圓$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{36}=1$ 的兩焦點都相同，且共軛軸長為 $2\sqrt{3}$，則此雙曲線方程式為____。(81 社會)

解 1：設雙曲線為$\dfrac{x^2}{6-k}+\dfrac{y^2}{36-k}=1$，且為鉛直貫軸，$\therefore -\dfrac{x^2}{-6+k}+\dfrac{y^2}{36-k}=1$

共軛軸長$=2\sqrt{3}=2\sqrt{-6+k}$，$\therefore$得知 $k=9$，得雙曲線$-\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{27}=1$

解 2：橢圓中 $c^2=a^2-b^2=36-6=30$

設雙曲線為$-\dfrac{x^2}{u^2}+\dfrac{y^2}{v^2}=1$，$\therefore u^2+v^2=c^2=30$ 且 $2u=2\sqrt{3}$

得知 $u=\sqrt{3}$，$v=\sqrt{27}$，$\therefore$得知 $k=9$，得雙曲線$-\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{27}=1$

答：$-\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{27}=1$

4.已知等軸雙曲線 Γ 的一條漸近線為 $x-y=0$，中心的坐標為$(1,\ 1)$，且 Γ 通過點$(3,\ 0)$，試問下列敘述那些是正確的？

(1) Γ 的二條漸近線互相垂直　(2) $x+y=0$ 為 Γ 的另一條漸近線　(3) Γ 的貫軸在直線 $y=1$ 上

(4)點$(1,\ \sqrt{3}-1)$為 Γ 的一個頂點　(5)點$(1,\ \sqrt{6}-1)$為 Γ 的一個焦點

解：(1)等軸雙曲線的二條漸近線互相垂直

(2)設另一漸近線為 $x+y=k$，通過中心$(1,\ 1)$，代入得 $k=2$，$\therefore$另一漸近線為 $x+y=2$

(3)設等軸雙曲線 Γ：$(x-y)(x+y-2)=t$，通過$(3,\ 0)$，代入得 $t=3$

$\Rightarrow \Gamma$：$\dfrac{(x-1)^2}{3}-\dfrac{(y-1)^2}{3}=1$，$\therefore$貫軸在直線 $y=1$ 上

(4) $a=b=\sqrt{3}$，$c^2=a^2+b^2=6$，$c=\sqrt{6}$，$\therefore$頂點$(1+\sqrt{3},\ 1)$，$(1-\sqrt{3},\ 1)$

(5) 焦點$(1+\sqrt{6},\ 1)$，$(1-\sqrt{6},\ 1)$

答：(1)(3) (84 推甄 10)

5.已知二拋物線 $x=y^2+3y-2$ 與 $y=x^2-kx+19$ 有交點，其中有二個交點在直線 $x+y=3$ 上，則 k 的值等於多少？

解：由$\begin{cases} x=y^2+3y-2 \\ x+y=3 \end{cases}$，得解$\begin{cases} x=8 \\ y=-5 \end{cases}$或$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

當$\begin{cases} x=8 \\ y=-5 \end{cases}$代入 $y=x^2-kx+19$，得 $k=11$；$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$代入 $y=x^2-kx+19$，得 $k=11$

答：11　(84 推甄 12)

6.坐標平面上有一橢圓，已知其長軸平行 y 軸，短軸的一個頂點為$(0,\ 4)$，且其中一個焦點為$(4,\ 0)$，問此橢圓長軸的長度為何？(1) 2　(2) $2\sqrt{2}$　(3) 6　(4) $6\sqrt{2}$　(5) $8\sqrt{2}$　(85 推甄)

解：$\because$短軸的一個頂點為$(0,\ 4)$，$\therefore b=4$，一個焦點為$(4,\ 0)$，$\therefore c=4$

由關係式：$a^2=b^2+c^2=32$，$\therefore a=4\sqrt{2}$，長軸長$=2a=8\sqrt{2}$

答：(5)

7.方程式 $\left|\dfrac{3x+y-19}{\sqrt{10}}\right|=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$ 所代表的錐線圖形 G，下列何者為真？(86 推甄)

(1) G 為拋物線　(2) (1，－2)為 G 的焦點　(3) $3x+y-19=0$ 為 G 的漸近線

(4) $x-3y+7=0$ 為 G 的對稱軸　(5)(3，1)為 G 的頂點

解：(1)方程式滿足拋物線的定義 $d(P，L)=d(P，F)$，如右圖

得知準線 L：$3x+y-19=0$，焦點 F(－1，2)

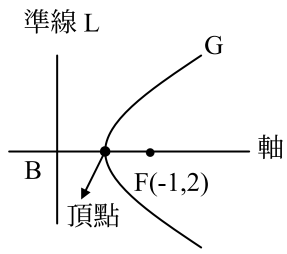
(2)對稱軸是通過焦點且垂直準線之直線

∴設軸：$x-3y+k=0$，F(－1，2)代入，得 $k=7$，

∴對稱軸為 $x-3y+7=0$

(3)∵準線 L：$3x+y-19=0$ 與對稱軸 $x-3y+7=0$ 交於 B(5，4)

又頂點為 B 與 F 的中點，∴頂點為(2，3)



答：(1)(4)

8.若已知方程式 $x^2+4y^2+2x+4y+k=0$ 的圖形為橢圓，則 k 的範圍為何？(86 社會)

(1)任何實數皆可　(2) $k<0$　(3) $k\neq 0$　(4) $k<2$　(5) $k>2$

解：方程式 $x^2+4y^2+2x+4y+k=0$ 經配方法得 $(x+1)^2+4(y+\frac{1}{2})^2=2-k$

同除 $2-k$，得 $\dfrac{(x+1)^2}{2-k}+\dfrac{(y+\frac{1}{2})^2}{\frac{2-k}{4}}=1$，∵圖形為橢圓，∴$2-k>0$，$\Rightarrow k<2$

答：(4)

9.在右圖中，圓 O 的半徑為 6，F 的坐標為(4，0)，Q 在圓 O 上，P 為 $\overline{FQ}$ 的中垂線與 $\overline{OQ}$ 的交點。當 Q 在圓 O 上移動時，動點 P 的軌跡方程式為_____。(87 推甄填 9)

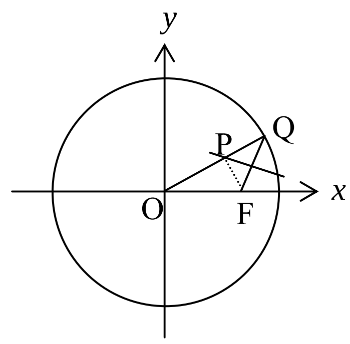
解：(1)∵P 為 $\overline{FQ}$ 的中垂線上一點，∴ $\overline{PF}=\overline{PQ}$

(2)∵ $\overline{PO}+\overline{PF}=\overline{PO}+\overline{PQ}=\overline{OQ}=6$ (半徑)

得知上式滿足橢圓定義，即 P 為以 O，F 為焦點，長軸長 $2a=6$ 的橢圓上一點

(3)此橢圓為水平長軸的橢圓，且中心為(2，0)

又 $2c=\overline{OF}=4$，由關係式 $a^2=b^2+c^2$ 得知 $b^2=5$，∴橢圓方程式為 $\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$



答：$\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$

10.設 a 與 b 為實數，關於二元二次方程式 $x^2+ay^2+2bx-4y=0$ 的圖形 Γ，下列那些敘述是正確的？(87 社會)

(1)若 $a=0$ 且 $b=0$，則 Γ 是一拋物線　(2)若 Γ 是一條拋物線，則 $a=0$ 且 $b=0$

(3)若 Γ 是一圓，則 $a=1$　(4)若 Γ 是一橢圓，則 $a>0$ 且 $a\neq 1$

(5)若Γ 是一雙曲線，則 $a<0$

解：(1)若 $a=0$ 且 $b=0$，得 $x^2-4y=0$，∴Γ 是一拋物線

(2)若 $a=0$ 且 $b=1$ 時，Γ也 是一條拋物線

(3)若 Γ 是一圓，則 x^2，y^2 項係數相同，∴$a=1$

(4)若 Γ 是一橢圓，則 x^2，y^2 項係數同號但不相等，∴$a>0$ 且 $a\neq 1$

(5)若Γ 是一雙曲線，則 x^2，y^2 項係數異號，∴$a<0$

答：(1)(3)(4)(5)

11.關於橢圓Γ：$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}=6$，下列何者為真？(88 推甄)

(1) (0，0)是 Γ 的中心　(2) (1，2)，(－1，－2)為 Γ 的焦點　(3) Γ 的短軸長為 4

(4) Γ 對稱於直線 $x=y$　(5) Γ 對稱於(1，2)與(－1，－2)的連線

解：(1)原式滿足橢圓定義，∴得知兩交點為 $F_1(1，2)$，$F_2(-1，-2)$，長軸長 $2a=6$

(2) Γ 的中心是 F_1，F_2 的中點，∴中心為$(\dfrac{1+(-1)}{2}，\dfrac{2+(-2)}{2})=(0，0)$

(3)∵$2c=\overline{F_1F_2}=\sqrt{(1+1)^2+(2+2)^2}=2\sqrt{5}$，∴$c=\sqrt{5}$

由關係式 $a^2=b^2+c^2$，∴$9=b^2+5$，得知 $b=2$，∴短軸長 $2b=4$

(4) Γ 的對稱軸為長軸與短軸

(i)長軸 $\overline{F_1F_2}$ 方程式：由兩點式 $\dfrac{y-2}{x-1}=\dfrac{-2-2}{-1-1}$，∴得知 $2x-y=0$

(ii)短軸是通過中心(0，0)，且垂直長軸的直線，∴方程式為 $x+2y=0$

答：(1)(2)(3)(5)

12.已知一橢圓的長軸平行於 x 軸，中心為(1，2)且通過點(4，6)。試問下列那些點一定會在這橢圓上？(88 社會)

(1) (－2，－2)　(2) (－2，6)　(3) (4，－2)　(4) (5，6)　(5) (3，4)

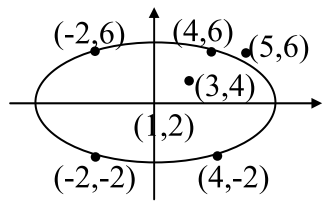
解：(1) (－2，－2)為(4，6)關於中心的對稱點

(2) (－2，6)為(4，6)關於短軸的對稱點

(3) (4，－2)為(4，6)關於長軸的對稱點

(4) (5，6)是由(4，6)向右水平 1 單位，故必在橢圓外部

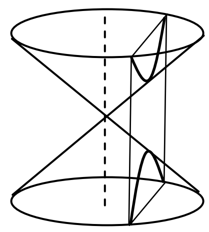
(5) (3，4)是由(4，6)向左 1 單位，向下 2 單位，故必在橢圓內部



答：(1)(2)(3)

13.將連接 (1，0，0) 與 (0，0，1) 兩點的直線，繞 z 軸旋轉而得一直圓錐面，則此直圓錐面與平面 $x=2$ 相交而得的圖形為哪一種？(88 自)

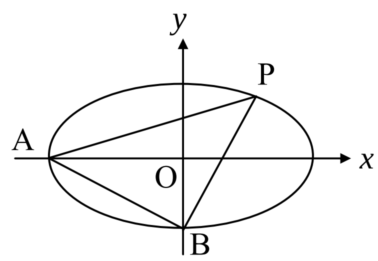
(1)直線　(2)圓　(3)橢圓　(4)拋物線　(5)雙曲線



解：如右圖

答：(5)

14.如下圖，A，B 為橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 之兩頂點，其中 a，b 皆為正數。若 P 為第一象限的橢圓弧上之一點，則ΔABP 最大的面積為何？(88 自)



解：1.根據圖形，A($-a$，0)，B(0，$-b$)，設 Q($a\cos\theta$，$b\sin\theta$)，

2. ∴ΔOPQ 面積＝$\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} a\cos\theta & b\sin\theta & 1 \\ -a & 0 & 1 \\ 0 & -b & 1 \end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{2}\left|ab+ab\cos\theta+ab\sin\theta\right|$

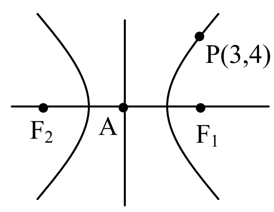
$=\dfrac{ab}{2}\left|1+\cos\theta+\sin\theta\right|\le\dfrac{ab}{2}(1+\sqrt{1^2+1^2})=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}ab$

答：$\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}ab$

15.在坐標平面上，以(－1，1)，(3，1)為焦點，且通過點(3，4)畫一雙曲線。試問此雙曲線也會通過下列哪些點？

(1) (1，1)　(2) (－1，4)　(3) (3，－2)　(4) (－1，－2)　(5) (3，1)

解：(1)根據題意，設 F_1(3，1)，F_2(－1，1)，P(3，4)，中心 A(1，1)，如右圖



∴令雙曲線Γ：$\dfrac{(x-1)^2}{a^2}-\dfrac{(y-1)^2}{b^2}=1$

(2)∵$2a=\overline{PF_1}-\overline{PF_2}=2$，∴$a=1$，⇒$2c=\overline{F_1F_2}=4$，$c=2$，且∵$c^2=a^2+b^2$，∴$b^2=3$

⇒ 雙曲線Γ：$\dfrac{(x-1)^2}{1}-\dfrac{(y-1)^2}{3}=1$

(3) (2)(3)(4)代入 Γ，合

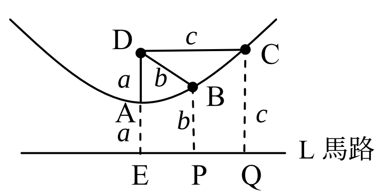
答：(2)(3)(4) (89 推甄 8)

16.阿山家在一條東西向馬路的北方 D 點處，為了不同目的，他走到馬路的路線有下列三條：
向南走 a 公尺到 A 點之後，繼續向南走 a 公尺到達馬路；向東南走 b 公尺到 B 點之後，繼續向南走 b 公尺到達馬路；向東走 c 公尺到 C 點之後，繼續向南走 c 公尺到達馬路。根據上述資料，下列選項何者為真？(89 推甄 9)

(1) $c=2a$　(2) $a<b<c$　(3) $b=\sqrt{2}\,a$　(4) A，B，C，D 四點共圓

(5) A，B，C 三點剛好在以 D 點為焦點的拋物線上

解：依據題意，如右圖，



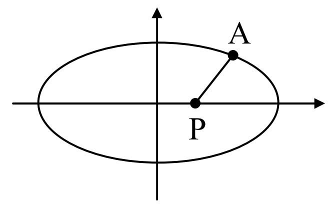
∵ $\overline{AD}=d(\text{A，L})=a$，$\overline{BD}=d(\text{B，L})=b$，$\overline{CD}=d(\text{C，L})=b$

⇒ 圖形為以 D 點為焦點、馬路 L 為準線的拋物線

∴$a<b<c$，c＝正焦弦長的一半＝$2a$

答：(1)(2)(5)

17.設(p, 0)為橢圓 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ 的長軸上一定點，且 $0<p<\frac{3}{2}$。若點(a, b)為橢圓上距離(p, 0)最近之點，則 $a=$______。(以 p 的函數表示) (89 自然)



解：(1)如圖，設點 A(a, b)＝A(2cosθ, sinθ)為橢圓上的動點，P(p, 0)為長軸上一定點

(2)$\because \overline{AP}=\sqrt{(2\cos\theta-p)^2+(\sin\theta-0)^2}=\sqrt{4\cos^2\theta-4p\cos\theta+p^2+\sin^2\theta}$

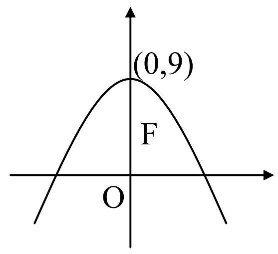
$=\sqrt{3\cos^2\theta-4p\cos\theta+p^2+1}=\sqrt{3(\cos\theta-\frac{2}{3}p)^2+(1-\frac{p^2}{3})}$

(3)$\because 0<p<\frac{3}{2}$，$\therefore 0<\frac{2}{3}p<1$，則當 $\cos\theta=\frac{2}{3}p$ 時，$\overline{AP}$ 有最小值 $\sqrt{1-\frac{p^2}{3}}$，$\Rightarrow a=2\cos\theta=2(\frac{2}{3}p)=\frac{4}{3}p$

答：$\frac{4}{3}p$

18.坐標平面上拋物線 C：$y=-4x^2+9$ 以外部分被 C 分成兩個不相交區域 試問下列那些點與拋物線的焦點位於同一區域？

(1) $(\frac{3}{2}, 2)$ (2) (1, 4) (3) $(-\frac{1}{2}, 7)$ (4) $(\frac{1}{2}, 7)$ (5) (0, 9) (89 社會)



解：(1)$\because y=-4x^2+9 \Rightarrow x^2=-\frac{1}{4}(y-9)$，$\therefore$焦點為 F(0, $\frac{143}{16}$)

如右圖，焦點 F 與與原點 O(0, 0)位於同一區域

令 $f(x, y)=4x^2+y-9$

$\because f(0, 0)=-9<0$，$\therefore$與焦點位於同一區域的點滿足 $f(x, y)=4x^2+y-9<0$

(2) (1) $f(\frac{3}{2}, 2)=2>0$； (2) $f(1, 4)=-1<0$； (3) $f(-\frac{1}{2}, 7)=-1<0$,

(4) $f(\frac{1}{2}, 7)=-1<0$； (5) $f(0, 9)=0$

得知(2)(3)(4)滿足 $f(x, y)=4x^2+y-9<0$

答：(2)(3)(4)

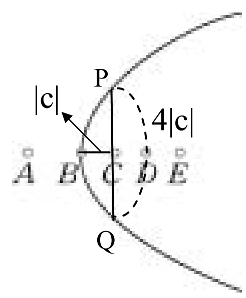
19.右圖為一拋物線的部分圖形，且 A、B、C、D、E 五個點中有一為其焦點。(90 推甄 2)
試判斷哪一點是其焦點？(可利用你手邊現有簡易測量工具)

(1) A (2) B (3) C (4) D (5) D

解：利用拋物線的正焦弦長等於焦距的 4 倍

如右圖，可測出 $\overline{PQ}=4\overline{BC}$，C 可能為焦點

其他各點均不符合正焦弦與焦距之關係

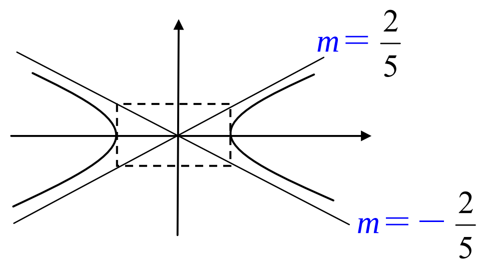


答：(3)

20.在坐標平面上，請問下列哪些直線與雙曲線 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1$ 不相交？(90 推甄 9)

(1) $5y=2x$ (2) $5y=3x$ (3) $5y=2x+1$ (4) $5y=-2x$ (5) $y=100$

解：(1)雙曲線之漸近線方程式為 $2x-5y=0$ 與 $2x+5y=0$，
且相交於中心(0, 0)，如右圖



(2)$\because$漸近線 $2x-5y=0$ 的斜率為 $\frac{2}{5}$，$2x+5y=0$ 的斜率為 $-\frac{2}{5}$

$\therefore$(i)若通過中心(0, 0)斜率 $m\geq\frac{2}{5}$ 或 $m\leq-\frac{2}{5}$ 的直線，皆不與雙曲線相交

(ii)若不通過中心(0, 0)，
但平行漸近線 $2x-5y=0$ 與 $2x+5y=0$ 的直線，不與雙曲線相交。

答：(1)(2)(4)

21.下列那些選項中的資訊當作已知條件時，可以在坐標平面上求出橢圓的方程式？(90 社會)

(1)橢圓四個頂點的坐標 (2)橢圓兩個焦點坐標及橢圓上一點的坐標 (3)橢圓的長短軸長度

(4)橢圓兩個焦點坐標及長軸的長度 (5)橢圓的中心坐標及長短軸長度比值

解：(1)條件，得知中心座標，長短軸之長(a, b 值)，可求出橢圓的方程式

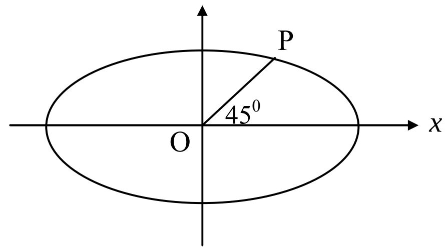
(2)條件，滿足橢圓之定義，可求出橢圓的方程式

(3)條件，無法得知中心座標，不可求出橢圓的方程式

(4)條件，得知中心座標，長短軸之長(a，b 值)，可求出橢圓的方程式
(5)條件，無法得知長短軸之長(a，b 值)，不可求出橢圓的方程式
答：(1)(2)(4)

22.在坐標平面上有一橢圓，它的長軸落在 x 軸上，短軸落在 y 軸上，長軸、短軸的長度分別為 4、2。如圖所示，通過橢圓的中心 O 且與 x 軸夾角為 45 度的直線在第一象限跟橢圓相交於 P。則此交點 P 與中心 O 的距離為　(91 學測 6)

(1) 1.5　(2) $\sqrt{1.6}$　(3) $\sqrt{2}$　(4) $\sqrt{2.5}$　(5) $\sqrt{3.2}$



解：(1)根據題意，此橢圓的中心為(0，0)，長軸半長 $a=2$，短軸半長 $b=1$

$\therefore$方程式為Γ：$\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{1^2}=1$

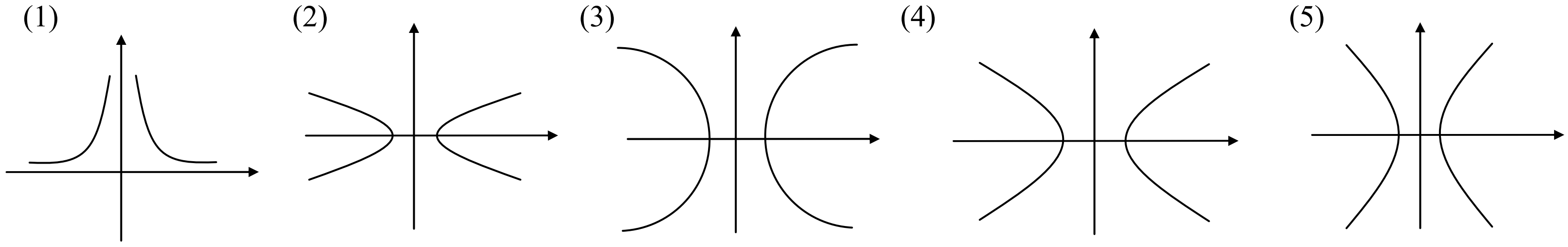
(2)直線 OP 與 x 軸夾角 45^0，設 P(k，k)代入Γ，得 $k^2=\dfrac{4}{5}$，$k=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，

$\therefore$P($\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\dfrac{2}{\sqrt{5}}$)，$\overline{OP}=\sqrt{k^2+k^2}=\sqrt{\dfrac{8}{5}}=\sqrt{1.6}$

答：(2)

23.下列圖形有一為雙曲線，請將它選出來。(91學測補3)

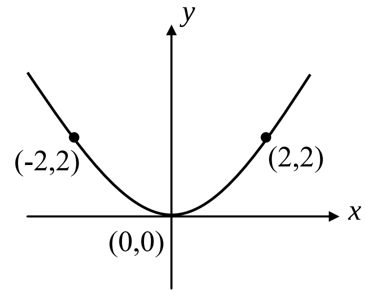
(1)　(2)　(3)　(4)　(5)



解：雙曲線的最大特色是具有漸近線$\therefore$通過中心，只有(4)可以利用直尺找出漸近線
答：(4)

24.如圖所示，在坐標平面上，以原點(0，0)為頂點，且通過(2，2)，(－2，2)的拋物線，它的焦點坐標為：(91 學測補 4)

(1) (0，0.5)　(2) (0，1)　(3) (0，1.5)　(4) (0，2)　(5) (0，4)



解：(1)$\because$圖形為開口向上，頂點為(0，0)的拋物線，$\therefore$設方程式 Γ：$(x-0)^2=4c(y-0)$

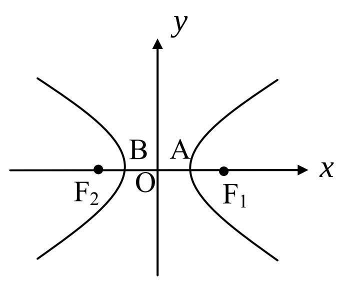
(2)通過(2，2)，代入Γ：$4=8c$，得知 $c=\dfrac{1}{2}$，即 Γ：$x^2=2y$

則焦點坐標為(0，$0+\dfrac{1}{2}$)＝(0，$\dfrac{1}{2}$)

答：(1)

25.關於雙曲線 $x^2-y^2=1$，下列選項何者為真？(91 學測補 7)

(1)對稱於 y 軸　(2)對稱於直線 $x-y=0$　(3)直線 $x+y=0$ 為一漸近線
(4) (－2，0)及(2，0)為其焦點　(5) (－1，0)及(1，0)為其頂點



解：(1)雙曲線之中心為(0，0)，貫軸為 x 軸，共軛軸為 y 軸，$\therefore$對稱於 y 軸，也對稱於 x 軸
(2)對稱 x 軸與 y 軸，不對稱於直線 $x-y=0$
註：對稱判斷：
以$-x$ 代 x，原方程式不變，表示對稱 y 軸
以$-y$ 代 y，原方程式不變，表示對稱 x 軸
以 x、y 互換，原方程式不變，表示對稱直線 $x-y=0$
(3)漸近線為 $x^2-y^2=0$，$\Rightarrow x-y=0$ 與 $x+y=0$
(4)如右圖，$\because a=1$，$b=1$，$c=\sqrt{2}$，$\therefore$焦點 $F_1(\sqrt{2}$，0)，$F_2(-\sqrt{2}$，0)，頂點 A(1，0)，B(－1，0)
答：(1)(3)(5)

26.平面上有以坐標原點為中心的兩個橢圓，已知這兩個橢圓的長軸長度相等，短軸長度也相等，並且兩橢圓相交於四個點。今將此四點以坐標原點為中心，反時鐘順序依次連成一個四邊形，請問下列那些敘述為真？(91 數學甲)

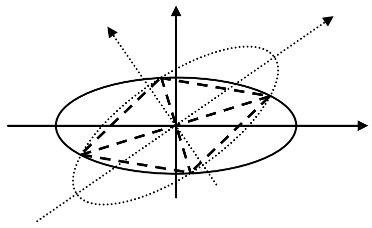
(1)該四邊形一定是正方形　(2)該四邊形不可能是長與寬不等的長方形
(3)該四邊形一定是平行四邊形　(4)該四邊形一定是菱形

解：(1)此四邊形的兩組對邊分別平行且邊長相等，如圖所示

∴該四邊形一定是平行四邊形且一定是菱形

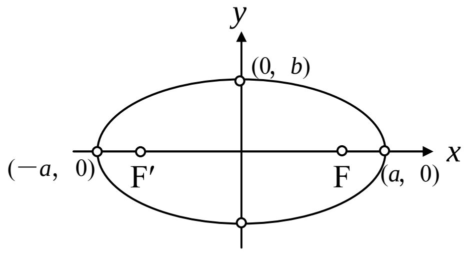
(2)兩橢圓的長軸若不垂直，

⇒二橢圓交成四點就一定不能連線形成正方形



答：(2)(3)(4)

27.設一橢圓方程式為 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，其中 $a>0$，$b>0$，F 為它的一個焦點。已知此橢圓在 x 軸上的兩個頂點與 F 的距離分別為 5 單位及 1 單位，如下圖所示。則$(a,\ b)=$____。(91 數學乙)

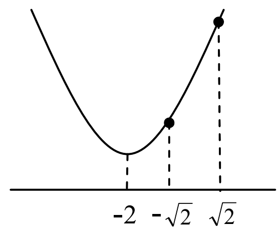


解：根據題意，得 $\begin{cases}a+c=5\\a-c=1\end{cases}$，∴$a=3$，$c=2$

由 $a^2=b^2+c^2$，∴$b^2=5$，⇒ $b=\sqrt{5}$，∴$(a,\ b)=(3,\ \sqrt{5})$

答：$(3,\ \sqrt{5})$

28.若點$(u,\ v)$在橢圓 $4x^2+9y^2=36$ 上，則 $uv+4u+6v+1$ 的最大值為___。(91 師大數學)



解：(1)橢圓 $4x^2+9y^2=36$，⇒ $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$，∴設$(u,\ v)=(3\cos\theta,\ 2\sin\theta)$

(2) $uv+4u+6v+1=6\cos\theta\sin\theta+12\cos\theta+12\sin\theta+1$

令 $k=\sin\theta+\cos\theta$，∴$-\sqrt{2}\le k\le\sqrt{2}$，且 $k^2=1+2\cos\theta\sin\theta$

∴原式$=3(k^2-1)+12k+1=3(k+2)^2-14$

則當 $k=\sqrt{2}$ 時，原式有最大值$=3(\sqrt{2}+2)^2-14=4+12\sqrt{2}$

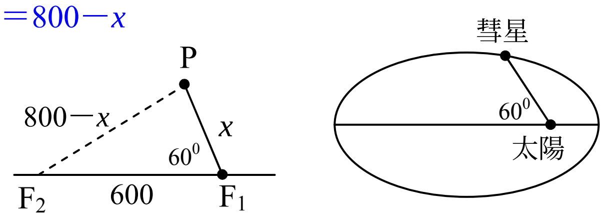
答：$4+12\sqrt{2}$

29.某一彗星之軌道為一橢圓，而以太陽為焦點。設此彗星與太陽之最近距離為 100 萬公里，最遠距離為 700 萬公里，則當此彗星與太陽之連線和橢圓的長軸承 60^0 夾角時(如右圖)，彗星與太陽的距離為______萬公里。(91 台北模)

解：(1)如右圖，根據題意，長軸長＝200，$\overline{F_1F_2}=600$，設 $\overline{PF_1}=x$，$\overline{PF_2}=800-x$

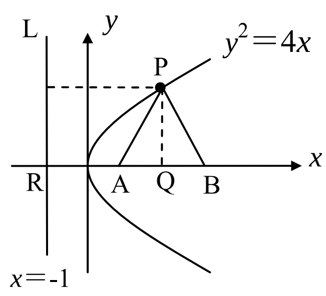
(2)由餘弦定理：$(800-x)^2=600^2+x^2-2(600)(x)\cos 60^0$

∴$x=280$



答：280

30 設 A(1，0) 與 B(b，0) 為坐標平面上的兩點，其中 $b>1$。若拋物線Γ：$y^2=4x$ 上有一點 P 使得ΔABP 為一正三角形，則 $b=$____。(92 學測 1)



解 1：(1)如右圖，作 $\overline{PQ}\perp x$ 軸於 Q 點

(2)令 $\overline{AP}=k$，∵ΔABP 為正三角形，∴∠PAB＝60^0

在ΔABQ 中，得知 $\overline{AQ}=\dfrac{1}{2}\overline{AP}=\dfrac{1}{2}k$

又∵A(1，0)為Γ的焦點，∴Q$(1+\dfrac{1}{2}k,\ 0)$

(3)根據拋物線定義：$d(\text{P},\ \text{A})=d(\text{P},\ \text{L})=\overline{QR}$

∴ $k=(1+\dfrac{1}{2}k)+1$ ⇒ $k=4$，則 $\overline{AQ}=\overline{BQ}=2$，得知 B(5，0)

解 2：(1)利用參數式，設 $P(k^2,\ 2k)\in\Gamma$

∴ $\overline{PA}=\sqrt{(k^2-1)^2+(2k-0)^2}=\sqrt{(k^2+1)^2}=k^2+1$

$\overline{PB}=\sqrt{(k^2-b)^2+(2k-0)^2}=\sqrt{k^4+(4-2b)k^2+b^2}$

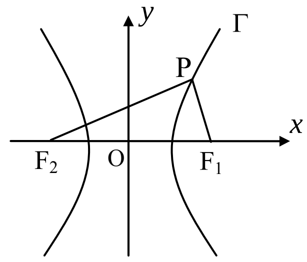
$\overline{AB}=b-1$ (其中 $b>1$)

(2)∵ΔABP 為正三角形，∴ $\overline{PA}=k^2+1=b-1$，得 $k^2=b-2$ 代入 $\overline{PB}=\sqrt{k^4+(4-2b)k^2+b^2}=b-1$

平方整理得 $b^2-6b+5=0$ ⇒ $(b-1)(b-5)=0$，$b=5$ 或 1 (不合，∵$b>1$)

答：$b=5$

31.設 P 為雙曲線$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$上的一點且位在第一象限。若 F_1、F_2 為此雙曲線的兩個焦點，且$\overline{PF_1}:\overline{PF_2}=1:3$，則$\Delta F_1PF_2$的周長等於______。(92 學測 1)



解：(1)如圖，Γ：$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$，$\therefore a^2=9$，$b^2=16$，$\Rightarrow c^2=a^2+b^2=25$，取 $c=5$，得知$\overline{F_1F_2}=2c=10$

(2)根據雙曲線定義：$|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=2a=6$

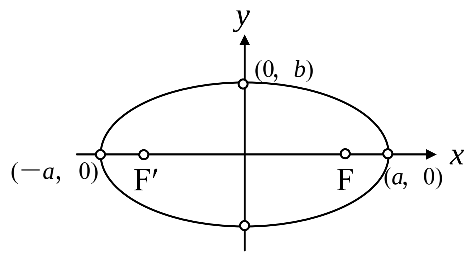
又$\because \overline{PF_1}:\overline{PF_2}=1:3$，$\therefore$設$\overline{PF_1}=k$，$\overline{PF_2}=3k$，(其中 $k>0$)

代入$|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=|-2k|=2k=6$，$\Rightarrow k=3$，得$\overline{PF_1}=3$，$\overline{PF_2}=9$

(3) ΔF_1PF_2的周長$=\overline{PF_1}+\overline{PF_2}+\overline{F_1F_2}=3+9+10=22$

答：22

32.設一橢圓方程式為$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，其中 $a>0$，$b>0$，F 為它的一個焦點。已知此橢圓在 x 軸上的兩個頂點與 F 的距離分別為 5 單位及 1 單位，如下圖所示。則$(a,\ b)=$______。(91 指考數乙 B)

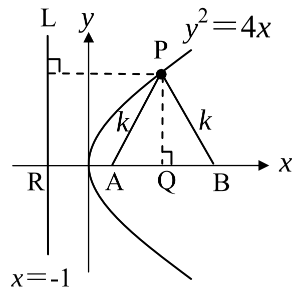


解：根據題意，得$\begin{cases}a+c=5\\a-c=1\end{cases}$，$\therefore a=3$，$c=2$

由 $a^2=b^2+c^2$，$\therefore b^2=5$，$\Rightarrow b=\sqrt{5}$，$\therefore(a,\ b)=(3,\ \sqrt{5})$

答：$(3,\ \sqrt{5})$

33.設 A(1, 0)與 B(b, 0)為坐標平面上的兩點，其中 $b>1$。若拋物線Γ：$y^2=4x$ 上有一點 P 使得ΔABP為一正三角形，則 $b=$____。(92 學測 C)



解 1：(1)如右圖，作$\overline{PQ}\perp x$軸於 Q 點

(2)令$\overline{AP}=k$，$\because\Delta ABP$為正三角形，$\therefore\angle PAB=60^0$

在ΔAPQ中，得知$\overline{AQ}=\dfrac{1}{2}\overline{AP}=\dfrac{1}{2}k$，

由Γ：$y^2=4x$ 知 A(1, 0)為其焦點，$\therefore Q(1+\dfrac{1}{2}k,\ 0)$

(3)根據拋物線定義：$d(P,\ A)=d(P,\ L)=\overline{QR}$

$\therefore k=(1+\dfrac{1}{2}k)+1$　$\Rightarrow k=4$，則$\overline{AQ}=\overline{BQ}=2$，得知 B(5, 0)

解 2：(1)利用參數式，$\because P\in\Gamma$：$y^2=4x$ 上，$\therefore$設 $P(k^2,\ 2k)$

$\therefore\overline{PA}=\sqrt{(k^2-1)^2+(2k-0)^2}=\sqrt{(k^2+1)^2}=k^2+1$

$\overline{PB}=\sqrt{(k^2-b)^2+(2k-0)^2}=\sqrt{k^4+(4-2b)k^2+b^2}$

$\overline{AB}=b-1$ (其中 $b>1$)

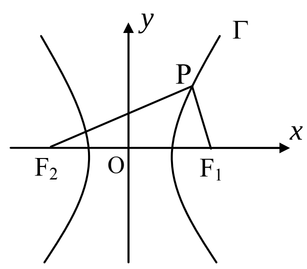
(2)$\because\Delta ABP$為正三角形

$\therefore\overline{PA}=k^2+1=b-1=\overline{AB}$，由 $k^2=b-2$ 代入$\overline{PB}=\sqrt{k^4+(4-2b)k^2+b^2}=b-1$

平方整理得 $b^2-6b+5=0$　$\Rightarrow(b-1)(b-5)=0$，$b=5$ 或 1 (不合，$\because b>1$)

答：$b=5$

34.設 P 為雙曲線$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$上的一點且位在第一象限。若 F_1、F_2 為此雙曲線的兩個焦點，且$\overline{PF_1}:\overline{PF_2}=1:3$，則$\Delta F_1PF_2$的周長等於______。(92 學測 D)



解：(1)如圖，Γ：$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$，$\therefore a^2=9$，$b^2=16$，$\Rightarrow c^2=a^2+b^2=25$，取 $c=5$

得知$\overline{F_1F_2}=2c=10$，令 $F_1=(5,\ 0)$、$F_2=(-5,\ 0)$

(2)$\because\overline{PF_1}:\overline{PF_2}=1:3$，$\therefore$設$\overline{PF_1}=k$，$\overline{PF_2}=3k$，(其中 $k>0$)

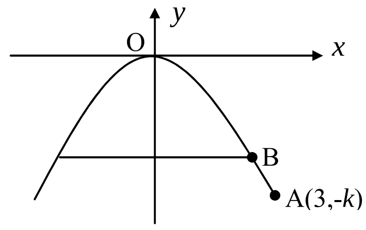
根據雙曲線定義：$|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=|-2k|=2k=6$

得 $k=3$，$\therefore\overline{PF_1}=k=3$，$\overline{PF_2}=3k=9$

(3) ΔF_1PF_2的周長$=\overline{PF_1}+\overline{PF_2}+\overline{F_1F_2}=3+9+10=22$

答：22

35.在只有皮尺沒有梯子的情形下，想要測出一拋物線形拱門的高度。已知此拋物線以過最高點的鉛直線為對稱軸。現甲、乙兩人以皮尺測得拱門底部寬為 6 公尺，且距底部 $\frac{3}{2}$ 公尺高處其寬為 5 公尺。利用這些數據可推算出拱門的高度為_____公尺。(化成最簡分數)(92 學測 G)

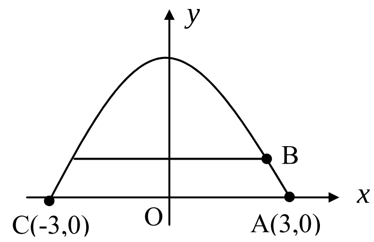


解 1：(1)如圖，建立一個坐標系，頂點為原點 O(0，0)，A(3，$-k$)，B($\frac{5}{2}$，$-a+\frac{3}{2}$)

(2)設此拋物線的方程式Γ：$x^2=4cy$

通過 A(3，$-k$)，代入Γ，得 $9=-4ck$

通過 B($\frac{5}{2}$，$-a+\frac{3}{2}$)，代入Γ，得 $\frac{25}{4}=4c(-k+\frac{3}{2})$，解之得 $c=-\frac{11}{24}$，$a=\frac{54}{11}$



解 2：(1)如圖，建立一個坐標系，A(3，0)，B($\frac{5}{2}$，$\frac{3}{2}$)

(2)設此拋物線的方程式Γ：$y=k(x-3)(x+3)$

通過 B($\frac{5}{2}$，$\frac{3}{2}$)代入Γ，得 $k=-\frac{6}{11}$，即Γ：$y=-\frac{6}{11}(x-3)(x+3)$

令 $x=0$ 代入Γ，得 $y=\frac{54}{11}$＝拱門的高度

答：$\frac{54}{11}$

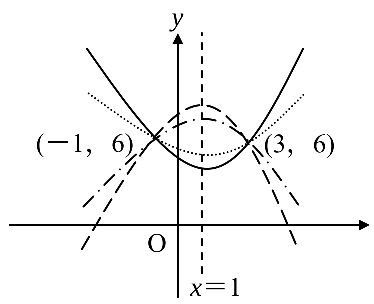
36.已知坐標平面上一拋物線 C 之對稱軸與坐標軸平行，且 C 通過(－1，6)與(3，6)兩點，試問下列哪些敘述是正確的？

(1)C 與 x 軸必相交　　(2) C 與 y－軸必相交

(3)如果 C 通過(2，5)，則可找到實數 $r\neq2$ 而 C 也通過(r，5)

(4)如果 C 通過(4，8)，則可找到實數 $r\neq8$ 而 C 也通過(4，s)

(5)如果 C 通過(0，3)，則 C 的頂點之 y－坐標為 2



解：根據題意，拋物線 C 之對稱軸為 $x=-1$，其方程式設為 C：$(x-1)^2=4c(y-k)$

(1)如圖，當開口向上時，可能與 x－軸不相交

(2)如圖，通過(－1，6)與(3，6)兩點，C 必與 y－軸必相交

(3)拋物線 C 可與水平線 $y=5$ 相交於 2 點，且具對稱性，故通過(r，5)，$r\neq2$

(4)拋物線 C 與鉛直線 $x=4$ 只可能相交於 1 點，故不通過(4，s)

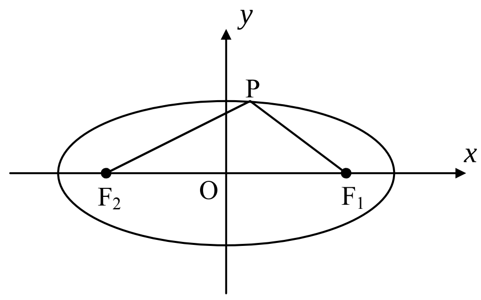
(5)∵通過(－1，6)，代入 C，∴$4=4c(6-k)$

∵通過(0，3)，代入 C，∴$1=4c(3-k)$

得知 $4c=1$，$k=2$，∴C：$(x-1)^2=y-2$，故其頂點為(1，2)

答：(2)(3)(5)　(92 學測補 9)

37.設 P 為橢圓Γ：$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 上的一點且位在上半平面。若 F_1、F_2 為Γ之焦點，且∠F_1P F_2 為直角，則 P 點的 y 坐標為________。(化成最簡分數) (92 學測補 F)



解 1：利用參數式

(1)如圖，∵Γ：$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$，∴得知 $a=5$，$b=3$，$c=4$

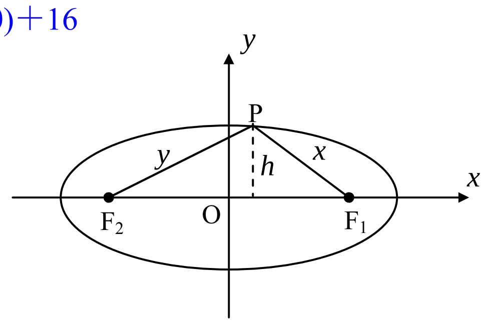
且令焦點 F_1(4，0)，F_2(－4，0)

設 P(5cos θ，3sin θ)，且 P 點位在上半平面，∴sin θ>0

(2)∵∠F_1P F_2＝90^0，即 $m_{PF_1}\times m_{PF_2}=-1$

$\Rightarrow \frac{3\sin\theta-0}{5\cos\theta-4}\times\frac{3\sin\theta-0}{5\cos\theta+4}=-1$ ，$\Rightarrow 9\sin^2\theta=-25\cos^2\theta+16=-25(1-\sin^2\theta)+16$

$\Rightarrow \sin^2\theta=\frac{9}{16}$，取 $\sin\theta=\frac{3}{4}$，∴P 點的 y－坐標為 $3\sin\theta=\frac{9}{4}$



解 2：利用面積相等

(1)如圖，∵Γ：$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$，∴得知 $a=5$，$b=3$，$c=4$

且令焦點 F_1(4，0)，F_2(－4，0)，$\overline{F_1F_2}=8$，設 P(m，h)，$\overline{PF_1}=x$，$\overline{PF_1}=y$

(2)$\because \Delta F_1P\,F_2=\dfrac{1}{2}x\cdot y=\dfrac{1}{2}8\cdot h \ \Rightarrow\ x\cdot y=8\cdot h$

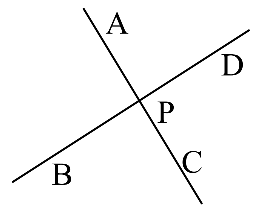
$\because \overline{PF_1}+\overline{PF_1}=2a$, $\therefore x+y=10$, $\because \overline{PF_1}^{\,2}+\overline{PF_1}^{\,2}=\overline{F_1F_2}^{\,2}\ \Rightarrow \therefore x^2+y^2=8^2$

$\Rightarrow\because (x+y)^2=x^2+2x\cdot y+y^2$, $\therefore 10^2=8^2+2(8\cdot h)$, 得 $h=\dfrac{9}{4}$, 即P點的y－坐標為 $h=\dfrac{9}{4}$

答：$\dfrac{9}{4}$

38.坐標平面上有一個橢圓，已知在(8，4)，(9，11)，(15，5)和(16，12)和這四個點中，有兩個是焦點，另外兩個是頂點，則此橢圓的半長軸長度等於________。(92 指考數甲)

解：(1)設 A(8，4)，B(9，11)，C(15，5)，D(16，12)



$\because \overline{AC}$ 的中點 P(12，8)，也為$\overline{BD}$的中點，∴得知 P(12，8)其中心

(2)$\because \overline{AP}=\sqrt{(8-12)^2+(4-8)^2}=4\sqrt{2}$

$\overline{BP}=\sqrt{(9-12)^2+(11-8)^2}=3\sqrt{2}$

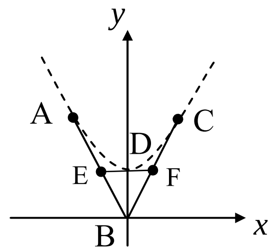
∴(i)若 A，C 為焦點，B，D 為頂點，∴$c=4\sqrt{2}$，$b=3\sqrt{2}$，得知半長軸長$=\sqrt{50}$

(ii)若 B，D 為焦點，A，C 為頂點，∴$c=3\sqrt{2}$，$b=4\sqrt{2}$，得知半長軸長$=\sqrt{50}$

答：$\sqrt{50}$

39.已知坐標平面上的四個點，A(－1，2)，B(0，0)，C(1，2)，D(x，y)，其中 D 為$\overline{AB}$中點與$\overline{BC}$中點的連線段的中點。設有一拋物線通過 A、D、C 三點，則此拋物線的焦點坐標為______。(92 指考數乙 C)

解：(1)設$\overline{AB}$中點 E$(-\dfrac{1}{2}$，1)，$\overline{BC}$中點 G$(\dfrac{1}{2}$，1)，∴$\overline{EG}$的中點 D(0，1)



(2)如圖，拋物線通過 A、D、C 三點，設拋物線Γ：$y=a(x-0)^2+1$

A(－1，2)代入Γ，得知 $a=1$，∴$x^2=y-1=4\cdot\dfrac{1}{4}(y-1)$

$\Rightarrow$ 焦點坐標 F$(0，\dfrac{5}{4})$

答：$(0，\dfrac{5}{4})$

40.已知 P($2\sqrt{3}$，1)是橢圓Γ：$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上一點，O 表橢圓Γ的中心。今要在Γ位於第二象限的曲線上求一點 Q，使得ΔOPQ 之面積最大，則 Q 點座標為_____。(92 北模)

解：1.設 Q(4cos θ，2sin θ)，$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$

$$\therefore \Delta OPQ\text{ 面積}=\frac{1}{2}\left|\,\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 1 \\ 4\cos\theta & 2\sin\theta \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\,\right|=\frac{1}{2}\left|4\sqrt{3}\sin\theta-4\cos\theta\right|=2\left|\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta\right|$$

$$=4\left|\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right|=4\sin(\theta-30^0)$$

2.$\because \dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$，$\therefore 60^0<\theta-30^0<150^0$

則當$\theta-30^0=90^0$時，ΔOPQ 之面積最大$=4\sin(\theta-30^0)$，$\Rightarrow \theta=120^0$ 帶入 Q(4cos θ，2sin θ)=Q(－2，$\sqrt{3}$)

答：Q(－2，$\sqrt{3}$)

41.關於雙曲線$(2x-y-5)(2x+y-7)=-16$，下列之論述何者正確？(92 台北模)

(1)$2x-y-5=0$ 與 $2x+y-7=0$ 是雙曲線的二漸近線　(2)中心是(3，1)

(3)貫軸是 $y=1$　(4)共軛軸是 $x=3$　(5)曲線上一點至兩漸近線距離的乘積為$\dfrac{16}{25}$

解：$(2x-y-5)(2x+y-7)=-16$，$\Rightarrow -\dfrac{(x-3)^2}{4}+\dfrac{(y-1)^2}{16}=1$，$a=4$，$b=2$

(A)漸近線為 $4(x-3)+2(y-1)=0$ 或 $4(x-3)-2(y-1)=0$，得 $2x-y-5=0$、$2x+y-7=0$

(B)中心為 $2x-y-5=0$ 與 $2x+y-7=0$ 的交點，∴中心(3，1)

(C)貫軸是 $x=3$

(D)共軛軸是 $y=1$

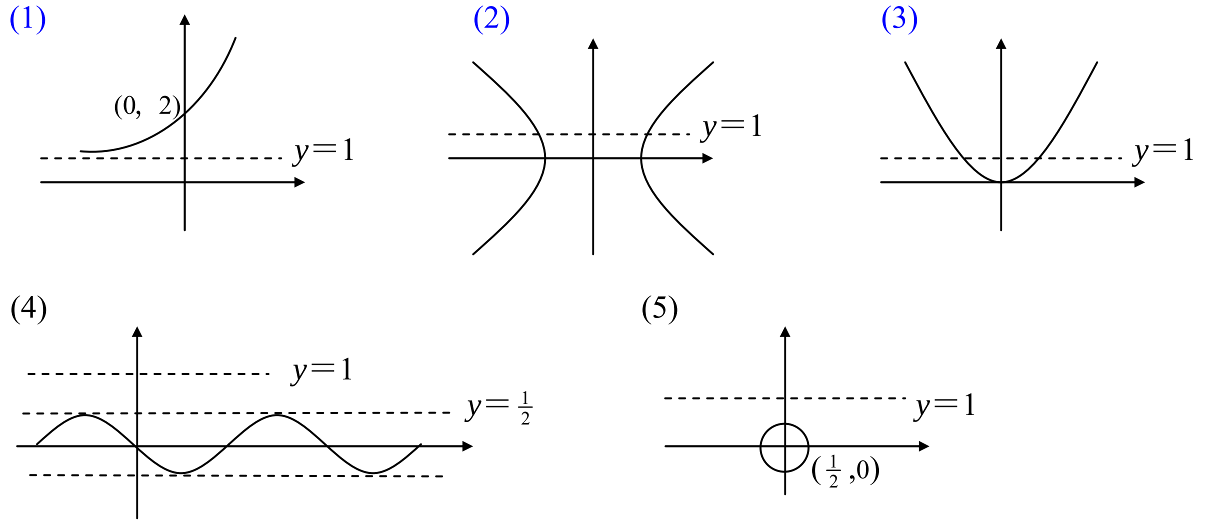
(E)所求 $=\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\dfrac{16\times4}{16+4}=\dfrac{16}{5}$

答：(A)(B)

42.在座標平面上，請問下列哪些方程式的圖形與 $y=1$ 之圖形無交點？(92 台北模)

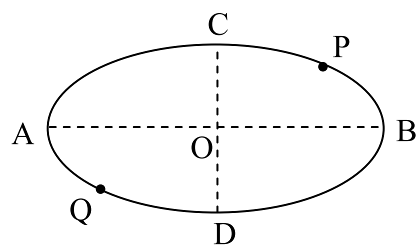
(1) $y=2^x+1$　(2) $\dfrac{2}{9}x^2-\dfrac{3}{4}y^2=1$　(3) $2x^2=3y$　(4) $y=\dfrac{1}{2}\sin 3x$　(5) $4x^2+4y^2=1$

解：



答：(1)(4)(5)

43.如圖，有一橢圓形運動場，已知其長軸長 $\overline{AB}=200$ 公尺，短軸長 $\overline{CD}=120$ 公尺，若蓉蓉站在距離長軸 36 公尺遠的 P 點處，美文站在距離短軸 60 公尺遠的 Q 點處，則蓉蓉與美文相距____公尺。(92 高雄模)



解：(1)根據題意，$\overline{OA}=100$，$\overline{OC}=60$，∴橢圓方程式Γ：$\dfrac{x^2}{100^2}+\dfrac{y^2}{60^2}=1$

(2)∵P(a，36)代入Γ，得 a＝80，∴P(80，36)

Q(－60，b)代入Γ，得 b＝－48，Q(－60，－48)

$\Rightarrow \overline{PQ}=\sqrt{(80+60)^2+(36+48)^2}=28\sqrt{34}$

答：$28\sqrt{34}$

44.在坐標平面上，下列哪些方程式的圖形可以放進一個夠大的圓裡面？(93 學測 8)

(1) $3x=2y^2$　(2) $3x^2+2y^2=1$　(3) $3x^2-2y^2=1$　(4) $|x+y|=1$　(5) $|x|+|y|=1$

解：依題意，只要是「封閉曲線(有邊界的圖形)」就可以放進一個夠大的圓裡面。

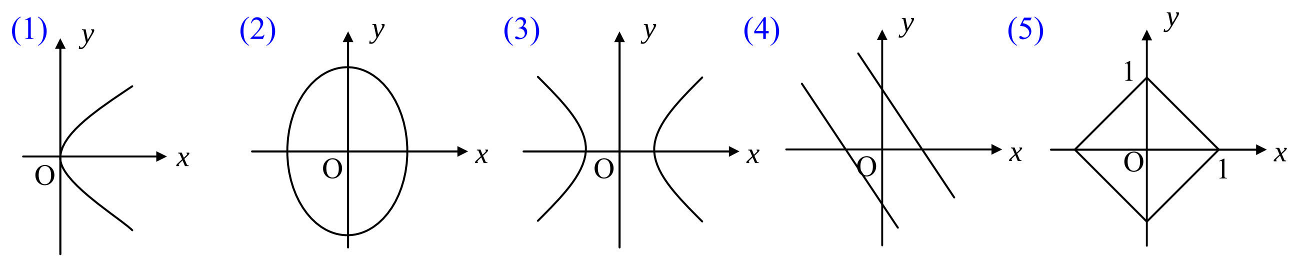
(1) $3x=2y^2$ 圖形為開口向右的拋物線，不是「封閉曲線」

(2) $3x^2+2y^2=1$ 圖形為一橢圓，是「封閉曲線」

(3) $3x^2-2y^2=1$ 圖形為一雙曲線，不是「封閉曲線」

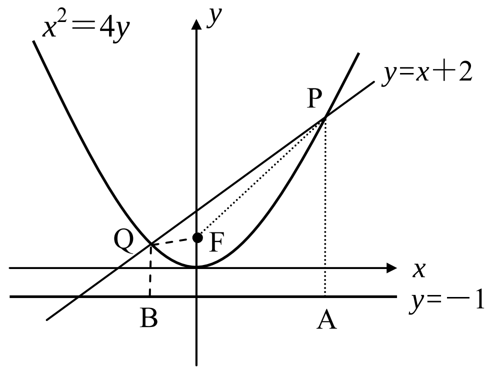
(4) $|x+y|=1$，即 $x+y=\pm1$，圖形為兩平行直線，不是「封閉曲線」

(5) $|x|+|y|=1$ 圖形為一菱形區域，是「封閉曲線」



答：(2)(5)

45.在坐標平面上，設直線 L：$y=x+2$ 與拋物線Γ：$x^2=4y$ 相交於 P、Q 兩點。若 F 表拋物線Γ的焦點，則 $\overline{PF}+\overline{QF}=$______。



解 1：(1)如圖，交點 P、Q $\begin{cases} L: y=x+2 \\ \Gamma: x^2=4y \end{cases}$，$\Rightarrow x^2=4(x+2)$，$x=2\pm2\sqrt{3}$

令 P$(2+2\sqrt{3}，4+2\sqrt{3})$，Q$(2-2\sqrt{3}，4-2\sqrt{3})$

(2)由拋物線Γ：$x^2=4y$，

得焦點 F(0，1)，準線 M：$y=-1$

根據拋物線定義：$\overline{PF}+\overline{QF}=d(\text{P}，\text{M})+d(\text{Q}，\text{M})$

$=\overline{PA}+\overline{QB}=(5+2\sqrt{3})+(5-2\sqrt{3})=10$

解 2：(1)由 L：$y=x+2$ 得 $x=y-2$，代入Γ：$x^2=4y$，

$\therefore (y-2)^2=4y$，即 $y^2-8y+4=0$

(2)如圖，由拋物線Γ：$x^2=4y$，得焦點 F(0，1)，準線 M：$y=-1$

令交點 P$(x_1，y_1)$、Q$(x_2，y_2)$，則 y_1，y_2 滿足 $y^2-8y+4=0$，$\Rightarrow$ $y_1+y_2=8$

$\therefore \overline{PF}+\overline{QF}=d(\text{P}，\text{M})+d(\text{Q}，\text{M})=\overline{PA}+\overline{QB}=(y_1+1)+(y_2+1)=(y_1+y_2)+2=8+2=10$

答：10(93 學測 I)

46.設 k 為一常數，已知一拋物線通過點(2，0)且焦點為(1，2)，準線為 $kx+y+1=0$，求拋物線頂點座標為_____。

解：(1)根據定義 d(P(2，0)，F(1，2))$=d$(P(2，0)，L：$kx+y+1=0$)

$\therefore \sqrt{(2-1)^2+(0-2)^2}=\dfrac{|2k+0+1|}{\sqrt{k^2+1^2}}$，得$(k-2)^2=0$，$\therefore k=2$，即準線為 $2x+y+1=0$

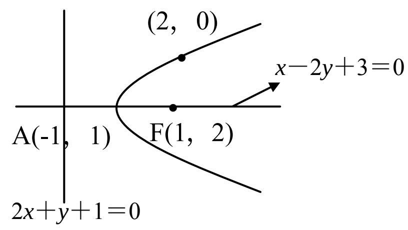
(2)如右圖，不失一般性

∵對稱軸垂直準線且通過焦點(1，2)

∴設對稱軸：$x-2y+m=0$，點(1，2)代入，得 $m=3$

(3)又準線與對稱軸相交於 A(－1，1)

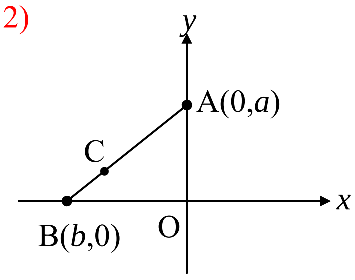
則頂點為 A 與 F 的中點$(\dfrac{-1+1}{2}，\dfrac{1+2}{2})=(0，\dfrac{3}{2})$



答：$(0，\dfrac{3}{2})$(93 指考數甲)

47.如下圖所示，線段 $\overline{AB}$ 的長度為定值，且 $\overline{AC}:\overline{CB}=2:1$。保持點 A 在 y 軸上，上下移動，且點 B 在 x 軸上左右移動時，點 C 所經過的路徑會形成一圖形。試問此圖形為何？

(1)一橢圓　(2)一圓　(3)一雙曲線　(4)一菱形　(5)一線段　(93 指考數乙 2)



解：(1)設 A$(0，a)$，B$(b，0)$，C$(x，y)$

利用分點公式得 $x=\dfrac{2b}{2+1}=\dfrac{2b}{3}$，$y=\dfrac{a}{2+1}=\dfrac{a}{3}$，$\therefore b=\dfrac{3}{2}x$，$a=3y$

(2)令 $\overline{AB}=\sqrt{b^2+a^2}=$定值 k，

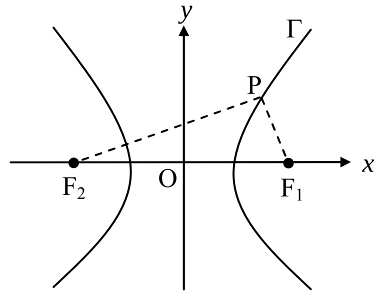
$\therefore$平方，得知 $b^2+a^2=k^2$，$\Rightarrow \dfrac{9}{4}x^2+9y^2=k^2$，$\Rightarrow \dfrac{x^2}{\frac{4k^2}{9}}+\dfrac{y^2}{\frac{k^2}{9}}=1$

即此圖形為一橢圓

答：(1)

48.設 F_1 與 F_2 為坐標平面上雙曲線 Γ：$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 的兩個焦點，P 為 Γ 上一點，使得此三點構成一等腰三角形，試問以下哪些值可能是這些等腰三角形的周長？(94 學測 10)

(1) 20　(2) 24　(3) 28　(4) 32　(5) 36



解：(1)如圖，設 P 在第一象限不失為一般性。

$\because \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$，得知 $a^2=9$，$b^2=16$，$\therefore$取 $a=3$，$b=4$，則 $c=5$

(2)$\therefore \overline{F_1F_2}=2c=10$ 且根據定義$|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=2a=6$，則

(i)等腰ΔPF_1F_2中，$\overline{PF_1}=\overline{F_1F_2}=10$，$\therefore |10-\overline{PF_2}|=6$，得知 $\overline{PF_2}=4$ 或 16

當 $\overline{PF_2}=4$，ΔPF_1F_2 的周長$=10+10+4=24$

當 $\overline{PF_2}=16$，ΔPF_1F_2 的周長$=10+10+16=36$

(ii)等腰ΔPF_1F_2中，$\overline{PF_2}=\overline{F_1F_2}=10$，∴$|\overline{PF_1}-10|=6$，得知$\overline{PF_1}=4$或 16

當$\overline{PF_1}=4$，ΔPF_1F_2的周長＝10＋10＋4＝24

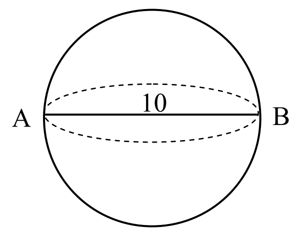
當$\overline{PF_1}=16$，ΔPF_1F_2的周長＝10＋10＋16＝36，故周長可能為 24 或 36

答：(2)(5)

49.設 S 為空間中一球面，$\overline{AB}$為其一直徑，且$\overline{AB}=10$，若 P 為空間中一點，使得$\overline{PA}+\overline{PB}=14$，則 P 點的位置可能落在哪裡？(94 學測 11)

(1)線段$\overline{AB}$上　(2)直線 AB 上，但不在線段$\overline{AB}$上　(3)球面 S 上

(4)球 S 的內部，但不在線段$\overline{AB}$上　(5)球 S 的外部，但不在直線 AB 上



圖一

解 1：如圖一：

(1)若 P 點在線段$\overline{AB}$上，則$\overline{PA}+\overline{PB}=10\neq 14$

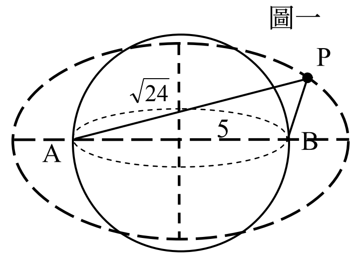
(2)若 P 點在直線 AB 上，不在線段$\overline{AB}$上，則$\overline{PA}+\overline{PB}>10$

(3)(4)(5)則$\overline{PA}+\overline{PB}>10$ (∵三角形中，兩邊和大於第三邊)

解 2：∵滿足$\overline{PA}+\overline{PB}=14$的點 P 之圖形是以 A、B 為焦點，長軸長 $2a=14$ 的橢圓，

設 $2c=10$，其短軸半長 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{7^2-5^2}=\sqrt{24}<5$

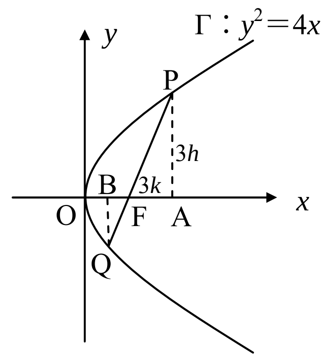
如圖二，橢圓上的點 P 可能在圓外、或在圓上、或在圓內。



圖二

答：(2)(3)(4)(5)

50.在坐標平面上，過 F(1，0)的直線交拋物線 $\Gamma：y^2=4x$ 於 P、Q 兩點，其中 P 在上半平面，且知$2\overline{PF}=3\overline{QF}$，則 P 點的 x 坐標為________。(化成最簡分數)(94 學測 G)



解 1：(1)如圖，作$\overline{PA}\perp x$ 軸，$\overline{QB}\perp x$ 軸，則ΔAPF 相似於ΔBQF

(2)∵$2\overline{PF}=3\overline{QF}$，∴$\overline{PF}：\overline{QF}=3：2$

令$\overline{AF}=3k$，$\overline{BF}=2k$；$\overline{PA}=3h$，$\overline{QB}=2h$，h，$k>0$，

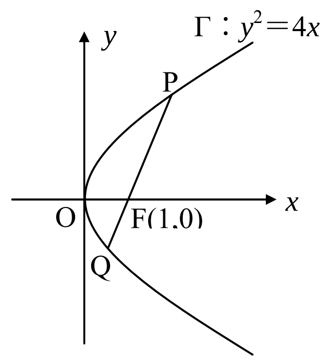
則得知 P$(1+3k，3h)$，Q$(1-2k，2h)$

(3)∵P，Q 皆在 Γ 上，分別代入 $\Gamma：y^2=4x$

$(3h)^2=4(1+3k)$ ….①

$(2h)^2=4(1-2k)$ ….②

由①除②，得 $k=\dfrac{1}{6}$，∴P 點的 x 坐標為 $1+3k=\dfrac{3}{2}$



解 2：(1)如圖，∵P，Q 皆在 Γ 上，設 P$(t^2，2t)$，Q$(k^2，2k)$

(2)∵P，F，Q 三點共線，且$\overline{PF}：\overline{QF}=3：2$

根據內分比性質：$5(1，0)=3(k^2，2k)+2(t^2，2t)$

x 分量：$5=3k^2+2t^2$

y 分量：$0=6k+4t$

解得 $k^2=\dfrac{2}{3}$，$t^2=\dfrac{3}{2}$，故 P 點的 x 坐標為$\dfrac{3}{2}$

答：$\dfrac{3}{2}$

51.試問在坐標平面上，下列有關拋物線的敘述哪些是正確的？(94指考數乙4)

(1)能夠找到拋物線以 x 軸為準線，$x+y=0$ 為對稱軸。

(2)能夠找到拋物線以 x 軸為準線，頂點是(1，1)，焦點是(1，2)。

(3)能夠找到拋物線以 x 軸為準線，焦點是(2，2)，且通過(3，3)。

(4)能夠找到拋物線以 x 軸為準線，且通過(3，3)，(－3，4)。

(5)能夠找到拋物線以 x 軸為準線，y 軸為對稱軸，且通過(3，3)，(－3，3)。

解：(1)錯誤，∵對稱軸與準線必互相垂直，但是 x 軸與 $x+y=0$ 並不互相垂直

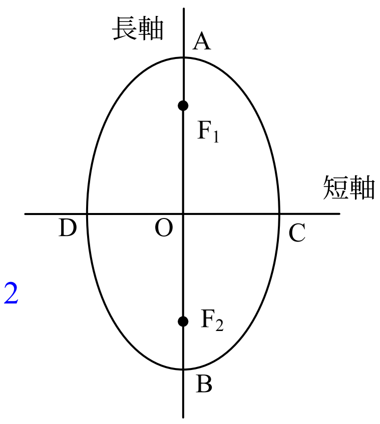
(2)正確，∵頂點(1，1)到焦點(1，2)的距離＝1＝頂點(1，1)到準線 x 軸的距離

(3)錯誤，∵點(3，3)到焦點(2，2)的距離＝$\sqrt{(3-2)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2}$，但點(3，3)到 x 軸的距離＝$3\neq\sqrt{2}$

(4)正確，以 x 軸為準線的拋物線，其對稱軸必垂直 x 軸，∴設拋物線方程式為$\Gamma：(x-h)^2=4c(y-k)$

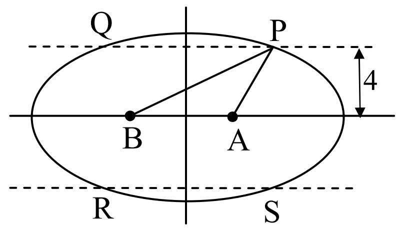
通過(3，3)，∴$(3-h)^2=4c(3-k)$
通過(－3，4)，∴$(-3-h)^2=4c(4-k)$
⇒上兩式聯立必有解，故必可找到滿足條件的拋物線
(5)正確，點(3，3)與(－3，3)對稱於 y 軸，∴必存在一拋物線符合所求。
答：(2)(4)(5)

52.考慮坐標平面上所有滿足 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y+4)^2}=10$ 的點$(x，y)$所成的圖形，下列敘述何者正確？
(1)此圖形為一橢圓　(2)此圖形為一雙曲線　(3)此圖形的中心在(2，－2)
(4)此圖形對稱於 $x-2=0$　(5)此圖形有一頂點(2，3)



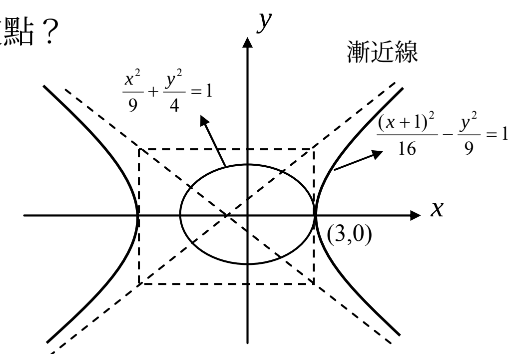
解：(1)設動點 P$(x，y)$，$F_1(2，0)$，$F_2(2，-4)$，且 $2a=10$，則 $\overline{F_1F_2}=2c=4<10=2a$，
滿足 $d(P(x，y)，F_1)+d(P(x，y)，F_2)=2a>\overline{F_1F_2}$
故圖形為鉛直長軸的橢圓(如圖)。
(2)∵$c=2$，$a=5$，由關係式 $a^2=b^2+c^2$，得 $b^2=21$
中心為 F_1，F_2 的中點 O(2，－2)，長軸頂點 A(2，3)，B(2，－7)
短軸頂點 C$(2+\sqrt{21}，-2)$，D$(2-\sqrt{21}，-2)$，對稱軸為長軸 $x=2$，與短軸 $y=-2$
答：(1)(3)(4)(5) (95 學測 7)

53.在坐標平面上給定兩點 A(1，3)與 B(5，6)。考慮坐標平面上的點集合 S＝{P| ΔPAB 之面積為 10 且周長為 15，則
(1) S 為空集合　(2) S 恰含 2 個點　(3) S 恰含 4 個點　(4) S 為兩線段之聯集　(5) S 為兩直線之聯集



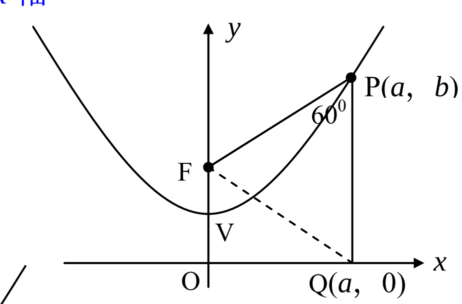
解：(1)∵ $\overline{AB}=\sqrt{(1-5)^2+(3-6)^2}=5$ 且ΔPAB 之面積為 10
∴ΔPAB 之高為 4，如右圖
(2)又∵ΔPAB 之周長為 15，∴ $\overline{PA}+\overline{PB}=10$
得知 P 點的軌跡為一以 A，B 為焦點之橢圓
⇒ $2a=10$，$a=5$ 且 $2c=\overline{AB}=5$，$c=\frac{5}{2}$，⇒ $b=\sqrt{5^2-(\frac{5}{2})^2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$
∵$b>4=$ΔPAB 之高，∴P，Q，R，S 四點都在集合 S 上，即有 4 個點滿足
答：(3) (95 指考甲)

54.坐標平面上方程式 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的圖形與 $\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的圖形共有幾個交點？
(1) 1 個　(2) 2 個　(3) 3 個　(4) 4 個　(5) 0 個

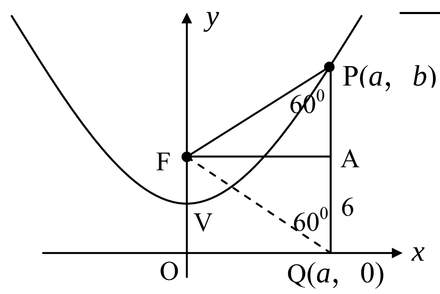


解：如下圖得知兩圖形只有 1 個交點，其坐標為(3，0)
答：(1) (96 學測 4)

55.坐標平面上有一以點 V(0，3)為頂點、F(0，6)為焦點的拋物線。設 P$(a，b)$為此拋物線上一點，Q$(a，0)$為 P 在 x 軸上的投影，滿足∠FPQ＝60°，則 b＝_____。(96 學測 H)



解 1：(1)如右圖，依題意不失一般性，∵頂點 V(0，3)，焦點 F(0，6)，∴準線 L：x 軸
(2) P$(a，b)$在拋物線上，根據定義 $d(P，F)=d(P，L)$ ⇒ $\overline{PF}=\overline{PQ}$
又∵∠FPQ＝60°，得知ΔPFQ 是正三角形
(3) $\overline{PF}=\overline{FQ}$ ⇒ $\sqrt{(a-0)^2+(b-6)^2}=\sqrt{(a-0)^2+(0-6)^2}$，∴$b=12$ 或 0(不合)
解 2：(1)如右圖，依題意不失一般性
∵頂點 V(0，3)，焦點 F(0，6)，∴準線 L：x 軸
(2) P$(a，b)$在拋物線上
根據定義 $d(P，F)=d(P，L)$ ⇒ $\overline{PF}=\overline{PQ}$
又∵∠FPQ＝60°，得知ΔPFQ 是正三角形
(3)過 F 作 $\overline{FA}\perp\overline{PQ}$於 A 點，∴ $\overline{AQ}=6$
∴在ΔAFQ 中，∵∠FAQ＝60°，
$\overline{FQ}=\overline{PQ}=b=2\times\overline{AQ}=2\times6=12$



解 3：(1)如右圖，依題意不失一般性，

∵頂點 V(0，3)，焦點 F(0，6)，∴準線 L：x 軸

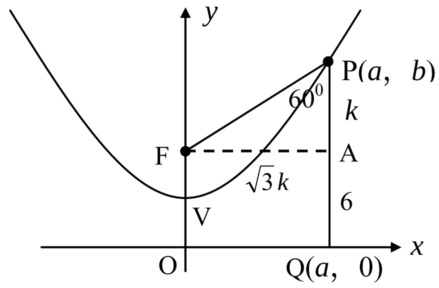
得知拋物線方程式為 $x^2=12(y-3)$

(2)過 F 作 $\overline{FA}\perp\overline{PQ}$ 於 A 點，∴ $\overline{AQ}=6$

(3)在ΔAFP 中，∵∠FPA＝60°，令 $\overline{AP}=k$，則 $\overline{FA}=\sqrt{3}k$

$\Rightarrow$ P(a，b)＝P($\sqrt{3}k$，$k+6$)代入拋物線方程式為 $x^2=12(y-3)$

$\Rightarrow(\sqrt{3}k)^2=12(k+6-3)$，得 $k=6$ $\Rightarrow b=k+6=12$



答：$b=12$

56.下面每一個選項都是以行列式表達坐標平面上的方式，請問哪些選項代表橢圓？(96 指考數乙 5)

(1) $\begin{vmatrix} x & y & x \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$　(2) $\begin{vmatrix} x^2 & 2y^2 & x \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$　(3) $\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & 2x \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$

(4) $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & y & x^2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$　(5) $\begin{vmatrix} x^2-y^2 & y & x \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$

解：選項行列式之一般式為 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$，展開得 $a+2b-5c=0$

(1) $x+2y-5x=0$，$\Rightarrow 2x-y=0$ 表示一直線

(2) $x^2+4y^2-5x=0$ 表示一橢圓

(3) $x^2+2y^2-10x=0$ 表示一橢圓

(4) $(x^2+y^2)+2y-5x^2=0\Rightarrow$ $-4x^2+y^2+2y=0$ 表示一雙曲線

(5) $x^2-y^2+2y-5x=0$ 表示一雙曲線

答：(2)(3)

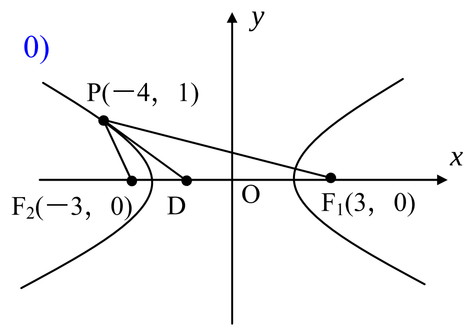
57.設 F_1 與 F_2 為坐標平面上雙曲線Γ：$\dfrac{x^2}{8}-y^2=1$ 的兩個焦點，且 P(－4，1)為上一點。若∠ F_1P F_2 的角平分線與 x 軸交於點 D，則 D 的 x 坐標為______。(97 學測 D)

解 1：如圖，設 $a^2=\sqrt{8}$，$b^2=1$，$c^2=a^2+b^2=9$，且令 F_1 (3，0)，F_2 (－3，0)，D(x，0)

∴ $\overline{PF_2}=\sqrt{2}$，$\overline{PF_1}=5\sqrt{2}$，∵ $\overline{PD}$平分∠ F_1P F_2

$\Rightarrow\overline{F_2D}:\overline{DF_1}=\overline{PF_2}:\overline{PF_1}=1:5$ (內分角線性質)

D(x，0)$=\dfrac{1}{6}$(3，0)$+\dfrac{5}{6}$(－3，0)＝(－2，0)



解 2：利用雙曲線的光學性質解

∵ $\overline{PD}$ 平分∠ F_1P F_2，得知直線 PD 為雙曲線Γ上過 P(－4，1)的切線。

∴代入切線公式，直線 PD 為 $\dfrac{(-4)x}{8}-1\cdot y=1\Rightarrow$ 切線 PD：$x+2y+2=0$

點 D 為切線 PD 與 x 軸之交點，令 $y=0$，則 $x=-2$，即 D(－2，0)

答：(－2，0)

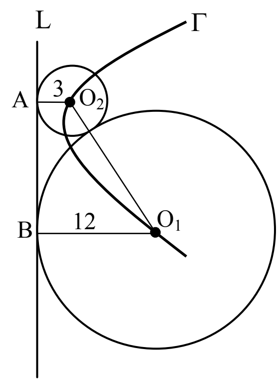
58.已知坐標平面上圓 O_1：$(x-7)^2+(y-1)^2=144$ 與 O_2：$(x+2)^2+(y-13)^2=9$ 相切，且此兩圓均與直線 L：$x=-5$ 相切。若Γ為以 L 為準線的拋物線，且同時通過 O_1 與 O_2 的圓心，則Γ的焦點坐標為(___，___)。(化為最簡分數) (97 學測 H)

解：(1)如右上圖，設拋物線Γ的焦點為 F(x，y)

∵拋物線Γ通過 O_1 與 O_2，根據拋物線定義 d(P，L)＝d(P，F)，P∈Γ

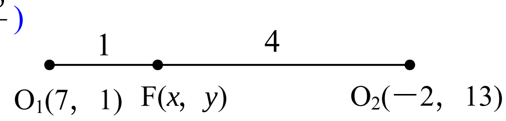
∴d(O_1，L)＝d(O_1，F)$\Rightarrow$ $\overline{O_1B}=12=\overline{O_1F}$

d(O_2，L)＝d(O_2，F)$\Rightarrow$ $\overline{O_2A}=3=\overline{O_2F}$，得知 $\overline{O_1F}:\overline{O_2F}=12:3=4:1$



(2)利用內分點公式(如右下圖)，

$(x，y)=\dfrac{4\cdot(-2,13)+1\cdot(7,1)}{1+4}=\dfrac{(-8+7,52+1)}{5}=(-\dfrac{1}{5}，\dfrac{53}{5})$



答：$(-\dfrac{1}{5}，\dfrac{53}{5})$

59.在坐標平面上，設拋物線Γ通過點(8，4)，且其對稱軸為直線 $x-2=0$。試問下列哪些選項是正確的？(97 指考數甲 8)

(1)若拋物線Γ的頂點坐標為(2，1)，則其焦點坐標必為(2，4)

(2)若拋物線Γ的焦點坐標為(2，12)，則其頂點坐標必為(2，3)

(3)若拋物線Γ也通過點(10，11)，則其準線方程式必為 $y+6=0$

(4)直線 $x-2=0$ 上每個點都可能是拋物線Γ的頂點

(5)直線 $x-2=0$ 上每個點都可能是拋物線Γ的焦點

解：根據題意，設拋物線Γ：$(x-2)^2=4c(y-k)$，∵Γ通過點(8，4)，∴代入Γ，得 $36=4c(4-k)$，$\Rightarrow c(4-k)=9$

(1)∵頂點為(2，1)，即 $k=1$，代入 $c(4-k)=9$，得 $c=3$，⇒焦點為(2，4)

(2)∵焦點為(2，12)，即 $c=12-k$，代入 $c(4-k)=9$，得 $(12-k)(4-k)=9$，$\Rightarrow (k-3)(k-13)=0$，∴$k=3$，13

⇒頂點為(2，3)或(2，13)

(3)Γ過點(10，11)，代入Γ：得 $64=4c(11-k)$，$\Rightarrow c(11-k)=16$

⇒由 $\begin{cases} c(4-k)=9 \\ c(11-k)=16 \end{cases}$，得 $\begin{cases} k=-5 \\ c=1 \end{cases}$，∴頂點為(2，－5)，準線方程式為 $y+6=0$

(4)在 $c(4-k)=9$ 中，當 $k=4$ 時，c 無解，⇒在直線 $x-2=0$ 上，除(2，4)外每個點都可能是拋物線Γ的頂點

(5)設焦點為(2，d)，∴$c=d-k$，代入 $c(4-k)=9$，則 $(d-k)(4-k)=9$，$\Rightarrow k^2-(d+4)k+(4d-9)=0$

其中判別式 $D=(d+4)^2-4(4d-9)=d^2-8d+52=(d-4)^2+36>0$，得知有兩相異實數根

⇒拋物線Γ的方程式有二個解，∴直線 $x-2=0$ 上每個點都可能是拋物線Γ的焦點

答：(1)(3)(5)

60.坐標平面上有兩條拋物線，第一條拋物線的頂點在(－4，0)，焦點在(－4，4)，第二條拋物線的頂點在(4，4)，焦點在(4，0)，求兩條拋物線的交點。(97 指考數乙一)

解：(1)第一條拋物線Γ_1之頂點在(－4，0)，焦點在(－4，4)，∵$c=4>0$，∴開口向上

方程式為 Γ_1：$(x+4)^2=4c(y-0)$，即 Γ_1：$(x+4)^2=16y$……①

(2)第一條拋物線Γ_2之頂點在(4，4)，焦點在(4，0)，∵$c=-4<0$，∴開口向下

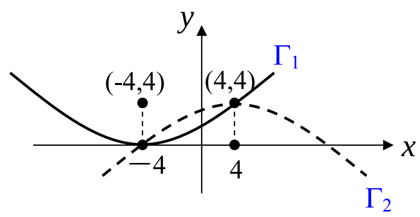
方程式為 Γ_2：$(x-4)^2=4c(y-4)$，即 Γ_2：$(x-4)^2=-16(y-4)$……②

(3)由①＋②：$(x+4)^2+(x-4)^2=64$，得知 $x=4$ 或 -4

當 $x=4$ 時，代入①，∴$y=4$

當 $x=-4$ 時，代入①，∴$y=0$

∴交點為(4，4)，(－4，0)



答：(4，4)，(－4，0)

61.假設Γ_1為坐標平面上一開口向上的拋物線，其對稱軸為 $x=-\frac{3}{4}$ 且焦距(交點到頂點的距離)為 $\frac{1}{8}$。若Γ_1與另一拋物線 Γ_2：$y=x^2$ 恰交於一點，則Γ_1的頂點之 y 坐標為_______。(化成最簡分數) (98 學測 E)

解：(1)根據題意，設Γ_1：$(x+\frac{3}{4})^2=4(\frac{1}{8})(y-k)=\frac{1}{2}(y-k)$，即$\Gamma_1$的頂點座標為$(-\frac{3}{4}，k)$

∴交點 $\begin{cases} \Gamma_1:(x+\frac{3}{4})^2=\frac{1}{2}(y-k) \\ \Gamma_2: y=x^2 \end{cases}$，由 $y=x^2$ 代入 $(x+\frac{3}{4})^2=\frac{1}{2}(y-k)$,,

$\Rightarrow (x+\frac{3}{4})^2=\frac{1}{2}(x^2-k)$，∴整理得 $x^2+3x+\frac{9}{8}+k=0$

(2)∵Γ_1與Γ_2恰交於一點，∴$x^2+3x+\frac{9}{8}+k=0$ 有二重根

⇒ 判別式 $=3^2-4(\frac{9}{8}+k)=0$，得 $k=\frac{9}{8}$，亦即Γ_1的頂點之 y 座標為 $\frac{9}{8}$

答：$\frac{9}{8}$

62.有一橢圓與一雙曲線有共同的焦點 F_1、F_2，且雙曲線的貫軸長和橢圓的短軸長相等。設 P 為此橢圓與雙曲線的一個交點，且 $\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=64$，則 $\overline{F_1F_2}=$_____。(98 學測 H)

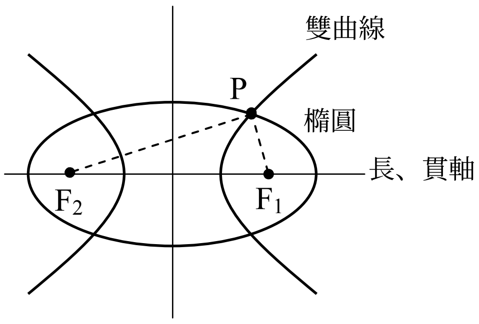
解 1：設 $\overline{PF_1}=2a$, $\overline{PF_2}=2b$, $\overline{F_1F_2}=2c$, 則 $4ab=64$

$\therefore$ 橢圓的長軸長 $=2a+2b=2(a+b)$, 短軸長 $=2a-2b=2(a-b)$

又雙曲線的貫軸長和橢圓的短軸長相等,

$\therefore c^2=(a+b)^2-(a-b)^2=4ab=64$, 得 $c=8$, $\therefore \overline{F_1F_2}=2c=16$

解 2：(1)設 $\overline{F_1F_2}=2c$, 雙曲線的貫軸長和橢圓的短軸長為 $2b$, 且橢圓的長軸長為 $2a$



$\therefore$ 橢圓方程式：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 且 $c^2=a^2-b^2$

(2)如右圖, 根據題意, $\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=64$

橢圓定義：$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$, 雙曲線定義：$|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=2b$

$\Rightarrow$ 由 $(\overline{PF_1}+\overline{PF_2})^2-(|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|)^2=4\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}$, $\Rightarrow \therefore 4a^2-4b^2=4\times 64$

$\Rightarrow c^2=64$, $\therefore c=8$, 得知 $\overline{F_1F_2}=2c=16$

答：16

63.令橢圓 Γ_1：$\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$、$\Gamma_2$：$\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=2$、$\Gamma_3$：$\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=\dfrac{2x}{5}$ 的長軸長分別為 l_1、l_2、l_3。請問下列哪一個選項是正確的？(99 學測 7)

(1) $l_1=l_2=l_3$　(2) $l_1=l_2<l_3$　(3) $l_1<l_2<l_3$　(4) $l_1=l_3<l_2$　(5) $l_1<l_3<l_2$

解：1.由 Γ_1：$\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$ 得知 $a^2=5^2$, $a=5$, 長軸長 $l_1=2a=10$

2.將 Γ_2：$\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=2$ 等號兩邊除以 2 化為標準式, 得 $\dfrac{x^2}{2\cdot 5^2}+\dfrac{y^2}{2\cdot 3^2}=1$

$\therefore$ 知 $a^2=2\cdot 5^2$, $a=5\sqrt{2}$, 長軸長 $l_2=2a=10\sqrt{2}$

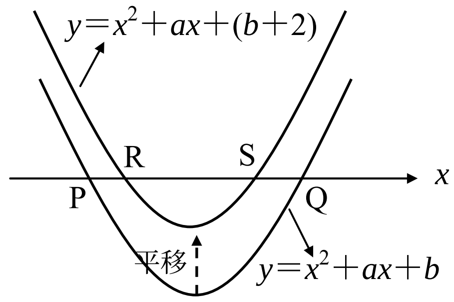
3.將 Γ_3：$\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=\dfrac{2x}{5} \Rightarrow \dfrac{x^2}{5^2}-\dfrac{2x}{5}+\dfrac{y^2}{3^2}=0$, $\dfrac{x^2-10x}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=0$

配方 $\dfrac{x^2-10x+5^2-5^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=0$, 得標準式為 $\dfrac{(x-5)^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$, $\therefore$ 知 $a^2=5^2$, $a=5$, 長軸長 $l_3=2a=10$

因此 $l_1=l_3<l_2$

答：(4)

64.設 a、b 為實數。已知坐標平面上拋物線 $y=x^2+ax+b$ 與 x 軸交於 P、Q 兩點, 且 $\overline{PQ}=7$。若拋物線 $y=x^2+ax+(b+2)$ 與 x 軸的兩交點為 R、S, 則 $\overline{RS}=$________。(99 學測 F)



解 1：1.如右圖, $y=x^2+ax+(b+2)$ 為 $y=x^2+ax+b$ 向上平移 2 單位

2.設 P(α, 0), Q(β, 0), 即α, β為 $x^2+ax+b=0$ 的兩根

$\therefore \alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=b$, 且 $\overline{PQ}=|\alpha-\beta|=7$

3.設 R(m, 0), S(n, 0), 即 m, n 為 $x^2+ax+(b+2)=0$ 的兩根

$\therefore m+n=-a=\alpha+\beta$, $mn=b+2=\alpha\beta+2$

$\Rightarrow \overline{RS}=|m-n|=\sqrt{(m-n)^2}=\sqrt{(m+n)^2-4mn}$

$=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4(\alpha\beta+2)}=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta-8}$

$=\sqrt{(\alpha-\beta)^2-8}=\sqrt{7^2-8}=\sqrt{41}$

解 2：(1)當 $x^2+ax+b=0$, $x=\dfrac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$ 或 $\dfrac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$

令 P$\left(\dfrac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}, 0\right)$, Q$\left(\dfrac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}, 0\right)$, 得知 $\overline{PQ}=\sqrt{a^2-4b}=7$

(2)同理當 $x^2+ax+(b+2)=0$, $\overline{RS}=\sqrt{a^2-4(b+2)}$

(3) $\because \overline{RS}^2=a^2-4b-8=\overline{PQ}^2-8=7^2-8=41$, $\therefore \overline{RS}=\sqrt{41}$

答：$\sqrt{41}$

65.坐標平面上給定點 A$(\frac{9}{4}$，2)、直線 L：$y=-5$ 與拋物線Γ：$x^2=8y$。以 d(P，L)表示點 P 到直線 L 的距離。若點 P 在 Γ 上變動，則 $|d(\text{P},\text{L})-\overline{AP}|$ 之最大值為________。(化成最簡分數) (99 學測 H)

解：(1)如右圖，Γ：$x^2=8y=4cy$，∴$c=2$ (開口向上之拋物線)

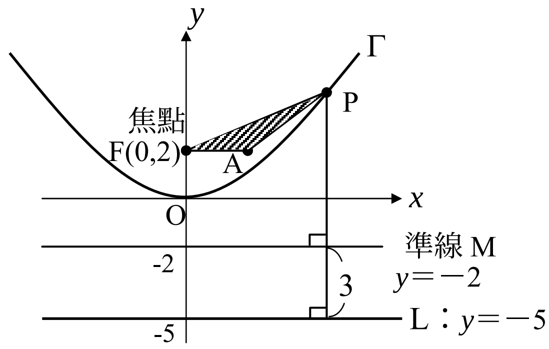
⇒焦點 F(0，2)，準線 M：$y=-2$

(2)∵$d(\text{P},\text{L})=d(\text{P},\text{M})+3=d(\text{P},\text{F})+3$

∴$|d(\text{P},\text{L})-\overline{AP}|=|d(\text{P},\text{F})-\overline{AP}|+3$

$=|\overline{PF}-\overline{AP}|+3>\overline{AF}+3=\frac{9}{4}+3=\frac{21}{4}$

∵在ΔAPF 中，$\overline{PF}-\overline{AP}>\overline{AF}=\frac{9}{4}-0=\frac{9}{4}$ (兩邊差小於第三邊)



答：$\frac{21}{4}$

66.坐標平面上滿足方程式$(\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2})(\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2})=0$ 的點(x，y)所構成的圖形為 (100 學測 4)

(1)只有原點 (2)橢圓及原點 (3)兩條相異直線 (4)橢圓及雙曲線 (5)雙曲線及原點

解：$(\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2})(\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2})=0$，⇒$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=0$ 或 $\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=0$

(i)當 $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=0$，得 $x=y=0$

(ii)當 $\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=0$，得 $4x-3y=0$ 或 $4x+3y=0$，且相交於(x，y)=(0，0)

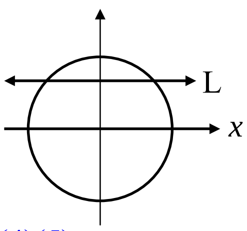
由(i)(ii)得知 $4x-3y=0$ 或 $4x+3y=0$

答：(3)

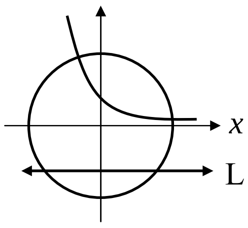
67.在坐標平面上，圓 C 的圓心在原點且半徑為 2，已知直線 L 與圓 C 相交，請問 L 與下列哪些圖形一定相交？

(1) x 軸 (2) $y=(\frac{1}{2})^x$ (3) $x^2+y^2=3$ (4) $(x-2)^2+y^2=16$ (5) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ (100 學測 11)

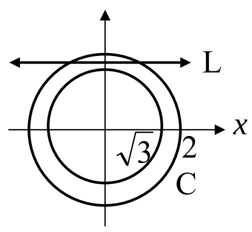
解：(1)不相交



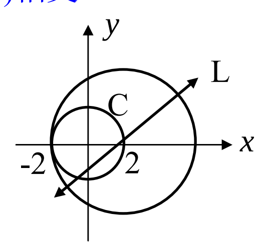
(2)不相交



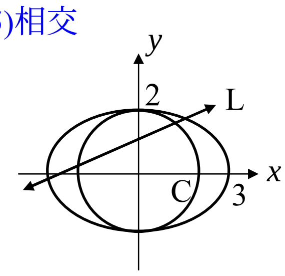
(3)不相交



(4)相交



(5)相交



答：(4)(5)

68.設 E$_1$：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (其中 $a>0$)為焦點在(3，0)，(−3，0)的橢圓；E$_2$：焦點在(3，0)且準線為 $x=-3$ 的拋物線。已知 E$_1$，E$_2$ 的交點在直線 $x=3$ 上，則 $a=$________。(100 學測 F)

解：(1)由橢圓 E$_1$ 得知 $c=3$，關係式 $a^2=b^2+9$，$a>3$，拋物線 E$_2$：$y^2=4\cdot3x=12x$

(2)解交點$\begin{cases}E_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\E_2:y^2=12x\end{cases}$，$x=3$ 代入 E$_2$ 得 $y=\pm6$，即交點為(3，6)，(3，−6)

∴$\begin{cases}\frac{9}{a^2}+\frac{36}{b^2}=1\\a^2=b^2+9\end{cases}$，⇒$9(a^2-9)+36a^2=a^2(a^2-9)$，⇒$a^2=27\pm18\sqrt{2}$

$a=\sqrt{27\pm18\sqrt{2}}=\sqrt{27\pm2\sqrt{162}}=\sqrt{18}\pm\sqrt{9}=3\sqrt{2}\pm3$，取 $a=3+3\sqrt{2}$ (∵$a>3$)

答：$3+3\sqrt{2}$

69.平面上兩點 F$_1$，F$_2$ 滿足$\overline{F_1F_2}=4$。設 d 為一實數，令Γ表示平面上滿足$|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=d$ 的所有 P 點所成的圖形，又令 C 為平面上以 F$_1$ 為圓心、6 為半徑的圓。請問下列哪些選項是正確？(101 學測 13)

(1)當 $d=0$ 時，Γ為直線 (2)當 $d=1$ 時，Γ為雙曲線 (3)當 $d=2$ 時，Γ與圓 C 交於兩點
(4)當 $d=4$ 時，Γ與圓 C 交於四點 (5)當 $d=8$ 時，Γ不存在

解：(1)當 $d=0$ 時，即 $|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=0$，得 $\overline{PF_1}=\overline{PF_2}$，P 點所成的圖形為 $\overline{F_1F_2}$ 之中垂線

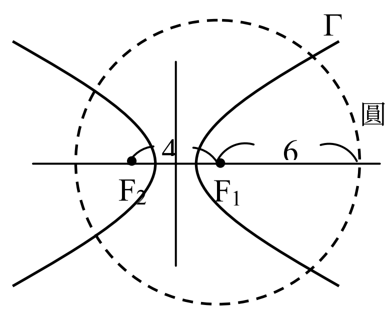
(2)當 $d=1$ 時，即貫軸長 $2a=1$，焦點長 $\overline{F_1F_2}=4=2c$，$c>a$，∴Γ為雙曲線

(3)當 $d=2$ 時，貫軸長 $2a=2$，焦點長 $=2c=4$，⇒如圖，Γ與圓 C 交於 4 點

(4)當 $d=4$ 時，貫軸長＝焦點長＝4，

⇒如圖，Γ的圖形為二射線，⇒ Γ與圓 C 交於 2 點

(5)當 $d=8$ 時，貫軸長 $=8>$ 焦點長 $=4$，⇒ Γ的圖形不存在



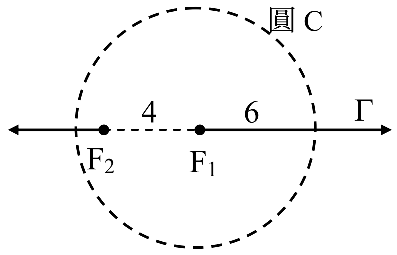
註：根據雙曲線的定義：

$d=0$ 時，Γ的圖形為中垂線

$0<d<4$ 時，Γ的圖形為雙曲線

$d=4$ 時，Γ的圖形為二射線

$d<0$，$d>4$ 時，Γ的圖形為不存在



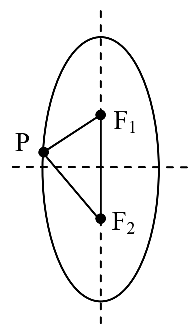
答：(1)(2)(5)

70.設 m，n 為正實數，橢圓 $\dfrac{x^2}{m}+\dfrac{y^2}{n}=1$ 的焦點分別為 $F_1(0,2)$ 與 $F_2(0,-2)$。若此橢圓上有一點 P 使得 ΔPF_1F_2 為一正三角形，則 $m=$_____，$n=$_____ (101 學測 F)

解：1.焦點分別為 $F_1(0,2)$ 與 $F_2(0,-2)$，得知為鉛直長軸的橢圓，如右圖

2.∵ΔPF_1F_2 為一正三角形，∴$\overline{PF_1}=\overline{PF_2}=\overline{F_1F_2}=4$，且 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=8=2\sqrt{n}$，得 $n=16$

3.由橢圓之關係式：$n=m+4$，得 $m=12$



答：$m=12$，$n=16$

71.設 $a<b<c$。已知實數系多項式函數 $y=f(x)$的圖形為一開口向上的拋物線，且與 x 軸交於$(a,0)$、$(b,0)$兩點；實係數多項式函數 $y=g(x)$的圖形亦為一開口向上的拋物線，且與 x 軸交於$(b,0)$、$(c,0)$兩點。請選出 $y=f(x)+g(x)$的圖形可能的選項。(102 學測 9)

(1)水平直線　(2)和 x 軸僅交於一點的直線　(3)和 x 軸僅無交點的拋物線

(4)和 x 軸僅交於一點的拋物線　(5)和 x 軸僅交於兩點的拋物線

解：設 $y=f(x)=h(x-a)(x-b)$，$y=g(x)=k(x-b)(x-c)$，h，k 皆為正數

⇒ $y=f(x)+g(x)=h(x-a)(x-b)+k(x-b)(x-c)=(x-b)[h(x-a)+k(x-c)]=(x-b)[(h+k)x-(a+c)]$

令 $f(x)+g(x)=(x-b)[(h+k)x-(a+c)]=0$，得 $x=b$ 或 $x=\dfrac{a+c}{h+k}$

(1) $f(x)+g(x)$為二次函數，圖形為拋物線

(2) $f(x)+g(x)$為二次函數，圖形為拋物線

(3)(4)(5)：若 $b=\dfrac{a+c}{h+k}$ 時，和 x 軸交於一點的拋物線

若 $b\neq\dfrac{a+c}{h+k}$ 時，和 x 軸交於兩點的拋物線

答：(4)(5)

72.坐標平面上考慮兩點 $Q_1(1,0)$，$Q_2(-1,0)$。在下列各方程式的圖形中，請選出其上至少有一點 P 滿足內積 $\overrightarrow{PQ_1}\cdot\overrightarrow{PQ_2}<0$ 的選項。(102 學測 10)

(1) $y=\dfrac{1}{2}$　(2) $y=x^2+1$　(3) $-x^2+2y^2=1$　(4) $4x^2+y^2=1$　(5) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$

解 1：代數解法

設 $P(x,y)$，$\overrightarrow{PQ_1}\cdot\overrightarrow{PQ_2}=(1-x,-y)\cdot(-1-x,-y)=x^2+y^2-1<0$，即

(1) $y=\dfrac{1}{2}$ 時，代入 $x^2+y^2-1=x^2-\dfrac{3}{4}<0$，此種 x 值存在

(2) $y=x^2+1$ 時，代入 $x^2+y^2-1=x^2+(x^2+1)^2-1=x^4+3x^2<0$，此種 x 值不存在

(3) $-x^2+2y^2=1$ 時，即 $x^2=2y^2-1$ 代入 $x^2+y^2-1=3y^2-2<0$，此種 y 值存在

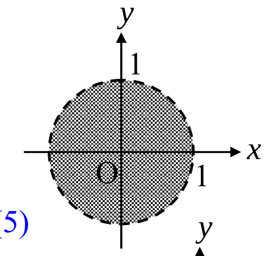
(4) $4x^2+y^2=1$ 時，即 $y^2=1-4x^2$ 代入 $x^2+y^2-1=-3x^2<0$，此種 x 值存在

(5) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$ 時，即 $x^2=y^2+2$ 代入 $x^2+y^2-1=2y^2+1<0$，此種 y 值不存在

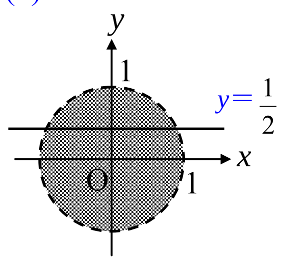
解 2：幾何解法

設 P(x，y)，$\overrightarrow{PQ_1}\cdot\overrightarrow{PQ_2}=(1-x,\ -y)\cdot(-1-x,\ -y)=x^2+y^2-1<0$，

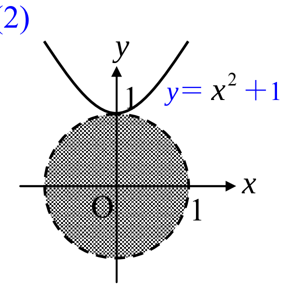
即 $x^2+y^2<1$，其幾何意義為圓心為(0，0)，半徑為 1 內部，如右圖



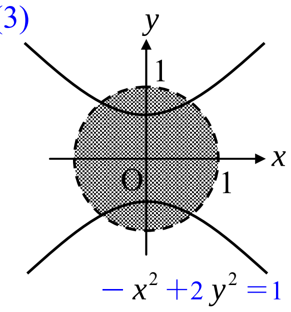
(1)



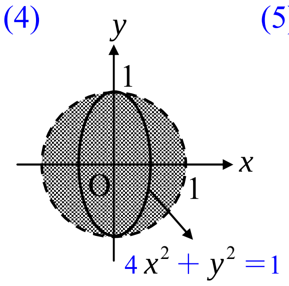
(2)



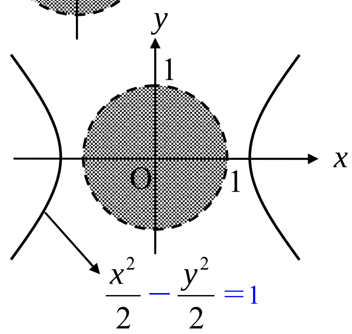
(3)



(4)



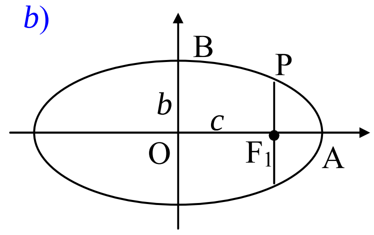
(5)



答：(1)(3)(4)

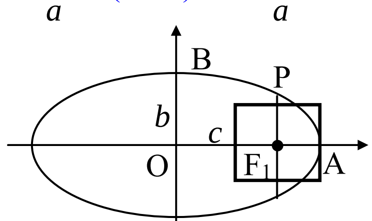
73.設 F_1，F_2 為橢圓Γ的兩個焦點。S 為以 F_1 為中心的正方形(S 的各邊可不與Γ的對稱軸平行)。試問 S 可能有幾個頂點落在Γ上？(1) 1　(2) 2　(3) 3　(4) 4　(5) 0　(102 學測 11)

解：(1)設(不失一般性)橢圓Γ：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，且 $a^2=b^2+c^2$，$F_1(c,\ 0)$，$A(a,\ 0)$，$B(0,\ b)$

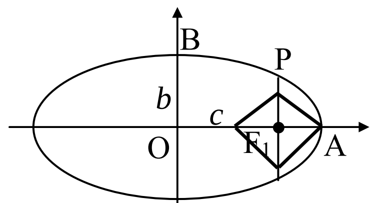


如圖，P(c，$\dfrac{b^2}{a}$)，且 $\overline{F_1P}=\dfrac{b^2}{a}$，$\overline{F_1A}=a-c$

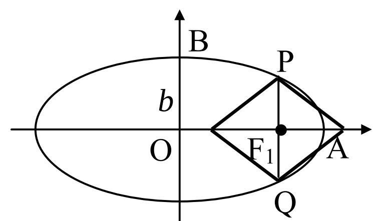
(2)$\because \dfrac{b^2}{a}-(a-c)=\dfrac{c(a-c)}{a}>0$，$\therefore \overline{F_1P}>\overline{F_1A}$，$\therefore$可能情形有



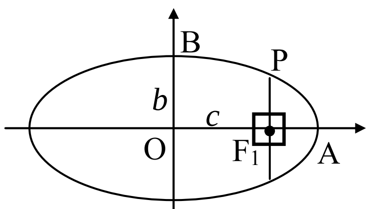
1 個頂點



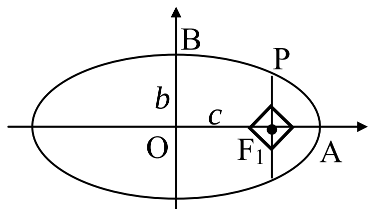
1 個頂點



2 個頂點



0 個頂點



0 個頂點

答：(1)(2)(5)