Ch 1.2 指數與常用對數　　一年____班　座號：____　姓名：

重點 1：指數律

1.意義：當 n 為正整數時，對於每一個實數 a，我們以記號「a^n」表示 a 自乘 n 次的乘積，即 $a^n=\underbrace{a\times a\times a\times\cdots\times a}_{n\text{ 個}}$

a^n 讀做「a 的 n 次方」，其中 a 稱為**底數**，n 稱為**指數**(或次數、次方)

註：a^2 讀做「a 的二次方或 a 的平方」、a^3 讀做「a 的三次方或 a 的立方」

2.正整數指數律：

設 a，b 為實數，m，n 為正整數，則：

(1) $a^m\times a^n=a^{m+n}$　　(2) $(a^m)^n=a^{mn}$　　(3) $a^n\times b^n=(ab)^n$

註：設 $a\neq 0$，$m>n$，則 $a^m\div a^n=\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

註：當 m，n 為整數時，指數律仍成立

3.性質：

(1)零指數：規定，若 $a\neq 0$，則 $a^0=1$

(2)負整數指數：若 $a\neq 0$，$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$，即 a^n 與 a^{-n} 互為倒數

註：0^0 與 0^{-n} 皆無意義

◎指數表示法

例 1.1：請在□、○中填入適當的數值：

(1) $5\times5\times5\times5=\square^{\bigcirc}$　　(2) $7^{-9}=\dfrac{1}{7^{\square}}$　　(3) $3^{\bigcirc}=\dfrac{1}{27}$　　(4) $(2^{20}+1)^0=\square$

例 1.2：試計算下列各式之值：

(1) $(-3)^2$　　(2) $(-3)^{-2}$　　(3) $(-3)^0$　　(4) 0^2

例 1.3：試以指數型式表示下列各式之值：

(1) $4^2\times4^{-3}$　　(2) $\dfrac{4^2}{4^{-3}}$　　(3) $(4^2)^{-3}$　　(4) $4^{-2}\times5^{-2}$

重點 2：有理數指數

1.意義：設 a 是正實數，n 是正整數，m 是整數，則：

(1) $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$　　(2) $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

2.有理數指數律：設 a，b 為正實數，m，n 為有理數，則：

(1) $a^m\times a^n=a^{m+n}$　　(2) $(a^m)^n=a^{mn}$　　(3) $a^n\times b^n=(ab)^n$

註：設 $a\neq 0$，$m>n$，$a^m\div a^n=\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

3.常用運算性質：設 a，b 是正實數，m，n，k 是正整數，則：

(1) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$　　(2) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$　　(3) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$　　(4) $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[kn]{a^{km}}$

例 2.1：請將下列乘冪以根號數的形式表示：

(1) $3^{0.5}$ (2) $2^{\frac{1}{3}}$ (3) $7^{\frac{3}{4}}$ (4) $r>0$，$r^{2.5}$

例 2.2：試利用指數律，求下列各式之值：(以最簡根式表示)

(1) $(5^{-\frac{1}{2}})^{-4}$ (2) $\dfrac{2^{-1.27}}{2^{-0.77}}$ (3) $(3-\sqrt{2})^3\times(3+\sqrt{2})^3$

例 2.3：一般而言，動物有固定的家居範圍，科學家發現可以用體重來估算動物的家居範圍

下列是幾個模型，其中 H(公頃)是家居範圍，W(公克)是體重：

(1)肉食性動物：$H=0.11W^{1.36}$；(2)草食性動物：$H=0.02W^{1.02}$；(3)雜食性動物：$H=0.059W^{0.92}$

試利用計算機，計算下表之各家居範圍：

動物	屬性	重量	家居範圍(公頃)
小獅子	肉食	100 公斤	
牛	草食	100 公斤	
家鼠	雜食	100 公克	

重點 3：實數指數與指數律

1.意義：設 a 是正實數，n 是無理數，則依據指數定義 a^n 為實數指數

2.實數指數律：

設 a，b 為正實數，m，n 為實數，則：

(1) $a^m\times a^n=a^{m+n}$ (2) $(a^m)^n=a^{mn}$ (3) $a^n\times b^n=(ab)^n$

註：設 $a\neq0$，$m>n$，$a^m\div a^n=\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

例 3.1：試求下列各式的值(以最簡根式表示)：

(1) $3^{1-\pi}\times3^{2+\pi}$ (2) $2^{\frac{1}{4}}\times3^{\frac{1}{4}}\times8^{\frac{1}{12}}\times81^{\frac{1}{16}}$ (3) $(3^{\sqrt{2}-1})^{\sqrt{2}+1}$

例 3.2：利用計算器，求下列各乘冪的值(四捨五入法，取至小數第 2 位)

(1) $7^{\sqrt{3}}$　　(2) $5^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

重點 4：科學記號與量級

1 意義：任意正實數 A 都可以用 $A=k\times10^{n}$，$1\le k<10$，n 是整數的形式來表示，稱為**科學記號**表示法

2.數的大小量級：將正實數 A 表示為 $k\times10^{n}$，$1\le k<10$，則稱 A 屬於 10^{n} 量級

註：負實數 A 表示為 $-k\times10^{n}$，$1\le k<10$，則稱 A 屬於 10^{n} 量級

3.量級的性質：

(1)當 n 是正整數時，10^{n} 量級的數表示有 n 個 0，是一個$(n+1)$位數，如：$2\times10^{3}=2000$

(2)當 n 是負整數時，10^{n} 量級的數表示小數點後第位開始出現不為 0 的數，如：$1.2\times10^{-3}=0.0012$

例 4.1：(1)試利用科學記號表示 16800 與 0.00168，並分別指出屬於哪一量級的數？

(2)化學裡的亞佛加厥數可記為 6.022×10^{23}，則它是屬於哪一量級的數？

例 4.2：試寫出下列各數位數情形：

(1) 3.14×10^{20} 表示整數部分有_____位

(2) 5×10^{108} 表示整數部分有_____位

(3) 3.14×10^{-20} 表示小數點後第____位開始不為 0

(4) 5×10^{-108} 表示小數點後第____位開始不為 0

重點 5：有效數字與有效位數

1.意義：以科學記號表示任意實數 $A=\pm k\times10^{n}$，$1\le k<10$，n 是整數，則：

(1)**有效數字**：係數 k 的所有數字皆為有效數字

(2)**有效位數**：有效數字的位數，稱為有效位數

2.有效位數的運算：

(1)加減運算：兩數做加減運算時，答案的有效位數以最「右」位不一定準確的有效位數字而定

(2)乘除運算：兩數做乘除運算時，答案的有效位數以此兩數中效位數「最少」者為準

例 5.1：試指出下列各數值的有效數字、有效位數與準確數字：

數值	有效數字	有效位數	準確數字
4.302×10^{3}			
4.30×10^{3}			

例 5.2：創先在科學雜誌上看到下列數據：

	地球	火星	冥王星
與太陽平均距離(單位：公里)	1.469×10^8	2.279×10^8	5.914×10^8

請問：(1)火星與太陽的平均距離比地球與太陽的平均距離遠多少？

冥王星與太陽的平均距離比地球與太陽的平均距離遠多少？

(2)冥王星與太陽的平均距離約為地球與太陽的平均距離的多少倍？

重點 6：10 的乘冪10^L與大小

1.乘冪的大小：若兩相異正數以科學記號表示時，可根據其量級或係數比較其大小：

(1)當**量級不同**時，以量級比較其大小，如：$3.4\times10^2 > 8.9\times10^{-3}$

(2)當**量級相同**時，以係數比較其大小，如：$9.76\times10^{-3} > 8.9\times10^{-3}$

2.乘冪10^L的性質：

(1)當10^L愈來愈大時，L 值會愈來愈大

(2)當 L 值愈來愈大時，10^L會愈來愈大

例 6.0：定義莫耳濃度是每公升溶液中含溶質的莫耳(mole)數，即莫耳濃度＝$\dfrac{\text{容質莫耳數}}{\text{溶液體積(公升)}}$。現有 pH＝3 的 A 瓶溶液 1 公升，含有$10^{-3}$mole 的$H^+$(氫離子)與另一 B 瓶 pH＝4 的溶液 1 公升，含有10^{-4}mole 的H^+(氫離子)混合，試求混合後溶液的 pH 值。

例 6.1：在－1 和 0 之間找出 2 個 L 值，使得10^L儘可能非常接近 0.5？(以四捨五入法，取10^L值至小數第 2 位)

解：

L 值	0.1			
10^L	1.258925			
10^L與 0.5 的差	0.758925			

例 6.2：試找出形如10^L的一個數來表示 3，使得10^L和 3 的誤差小於 0.001

例 6.3：(1)墨規發現$\sqrt{2}$介於$10^{0.1505}$和$10^{0.1506}$之間，試求所有 5 為小數中找一個 L，使得10^{L}最接近$\sqrt{2}$

(2)試比較$\sqrt{2}$、$10^{0.5}$、10^{-4}、$10^{-2.5}$的大小

重點 7：常用對數

1.意義：設正數 $x=10^{L}$，定義 x 的常用對數為 L，記為 $\log x=$L，其中 x 稱為真數，$\log x$ 可讀作「x 的常用對數」

如$10^{a}=0.5$，則 $a=\log 0.5$

註：以 pH 值為例：

當氫離子莫耳濃度$[H^{+}]=x=10^{-p}$時，$-p=\log x$，則酸鹼程度 pH 值$=-p=\log x$

2.運算性質：(補充)

設 $a>0$，$a\neq 1$，$b>0$，若$a^{x}=b$，$b>0$ 時，以符號$\log_{a} b$表示 x 之值，即 $x=\log_{a} b$

其中$\log_{a} b$稱為「以 a 為底數時，b 的對數」，a 稱為「底數」，b 稱為「真數」

註：$a^{x}=b \Leftrightarrow x=\log_{a} b$，$a>0$ 且 $a\neq 1$，$b>0$，$x\in$ R

3.首數與尾數(補充)

(1)意義：設 A 為正實數，將 log A 表示為 $\log \text{A}=n+\log k$，其中 n 為整數，$0\leq \log k<1$

則稱 n 為 log A 的**首數**，$\log k$ 為 log A 的**尾數**

(2)首數與尾數的解讀：

若首數 $n\geq 0$，表示 A 的**整數部分為($n+1$)位數**；其最高位(最左邊)數字，則由尾數來決定

若首數 $n<0$，表示 A 在小數點後**第 n 位開始出現不為 0 的數字**；其最高位(最左邊)數字，則由尾數來決定

(3)性質：

當 $n\geq 0$，且 $n\leq \log \text{A}<n+1$ 時，則 A 為10^{n}量級，即表示 A 的**整數部分為($n+1$)位數**

當 $n<0$，且 $n<\log \text{A}\leq n+1$ 時，則 A 為10^{n}量級，即表示 A 在小數點後**第$|n|$位開始出現不為 0 的數字**

例 7.1：已知 $x=3$，試利用計算機求 x 的常用對數，以四捨五入法取至小數第 4 位

例 7.2：試計算下列各式之值：

(1) $1000=10^{3}$，則 $\log 1000=$_____

(2) $0.01=10^{-2}$，則 $\log 0.01=$_____

(3) $2\approx 10^{0.3010}$，則 $\log 2\approx$ _____

例 7.3：試計算下列各式之值：

(1) $\log x=5$，則 $x=$_____ (2) $\log y=-4$，則 $y=$_____

(3) $\log z=\frac{1}{2}$，則 $z=$_____ (4) $\log w=2.8$，則 $w=$_____

例 7.4：描述聲音大小的分貝(dB)，與聲音的相對強度(w)可寫成下列關係式：$dB=10\cdot\log w$

一般人的談話音量約為 60 分貝，而哭鬧中的孩子音量可達 122 分貝，請問哭鬧聲的相對強度是談話聲音相對強度的多少倍？(四捨五入法，取至整數位)