

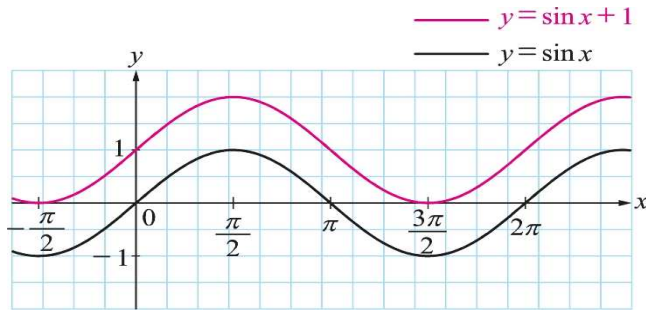
■例題 1 正弦函數圖形的上下平移與左右平移

利用 $y = \sin x$ 的圖形，畫出下列各函數的圖形：

(1) $y = \sin x + 1$

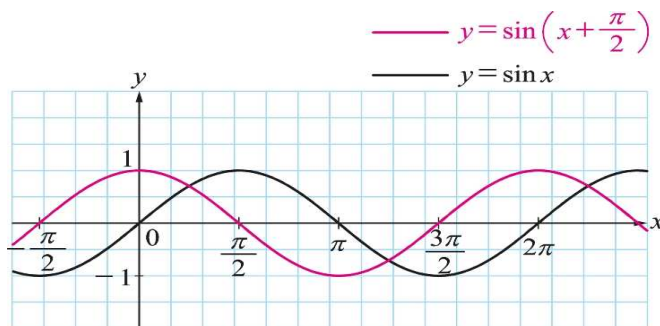
(2) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

解 (1)



將 $y = \sin x$ 的圖形向上平移 1 單位，
即得 $y = \sin x + 1$ 的圖形

(2)



將 $y = \sin x$ 的圖形向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 單位，
即得 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 的圖形

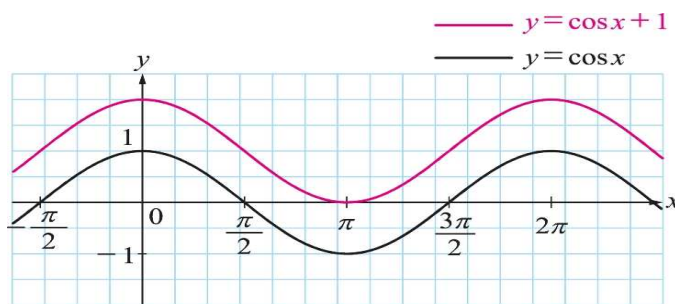
■例題 2 餘弦函數圖形的上下平移與左右平移

利用 $y = \cos x$ 的圖形，畫出下列各函數的圖形：

(1) $y = \cos x + 1$

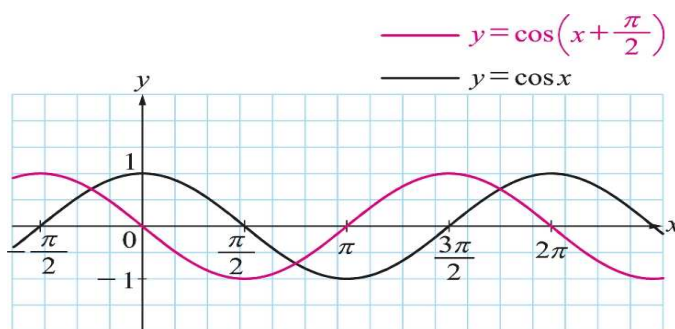
(2) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

解 (1)



將 $y = \cos x$ 的圖形向上平移 1 單位，
即得 $y = \cos x + 1$ 的圖形

(2)



將 $y = \cos x$ 的圖形向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 單位，
即得 $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 的圖形

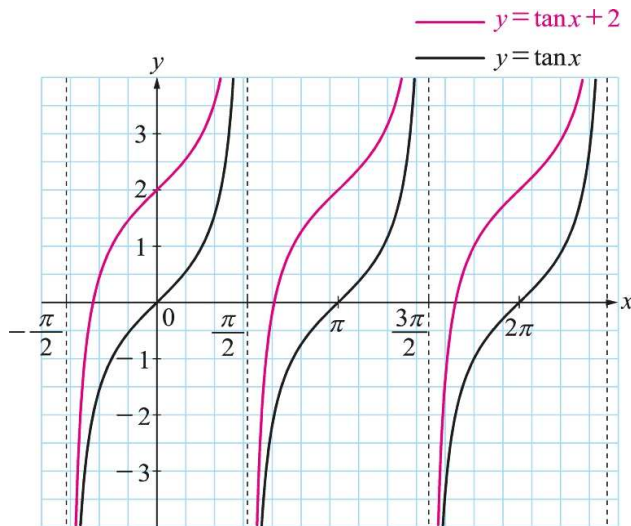
■例題 3 正切函數圖形的上下平移與左右平移

利用 $y = \tan x$ 的圖形，畫出下列各函數的圖形：

(1) $y = \tan x + 2$

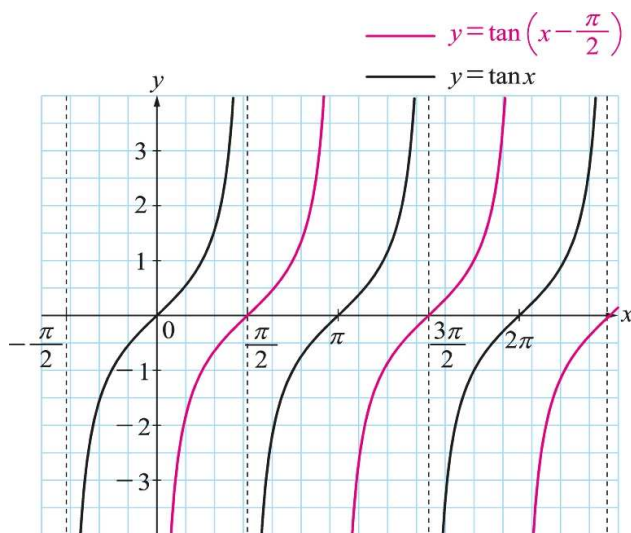
(2) $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

解 (1)



將 $y = \tan x$ 的圖形向上平移 2 單位，
即得 $y = \tan x + 2$ 的圖形

(2)



將 $y = \tan x$ 的圖形向右平移 $\frac{\pi}{2}$ ，
即得 $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 的圖形

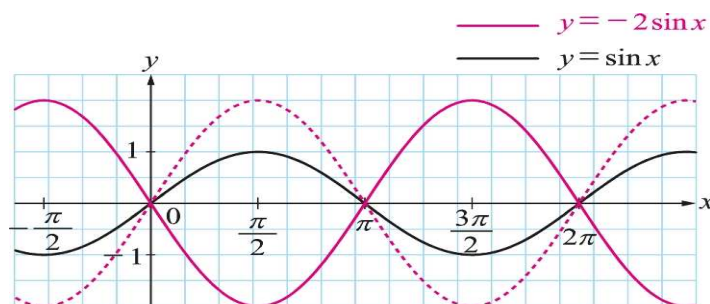
■例題 4 正弦函數圖形的上下伸縮與左右伸縮

利用 $y = \sin x$ 的圖形，畫出下列各函數的圖形，並求其週期、最大值與最小值：

(1) $y = -2 \sin x$

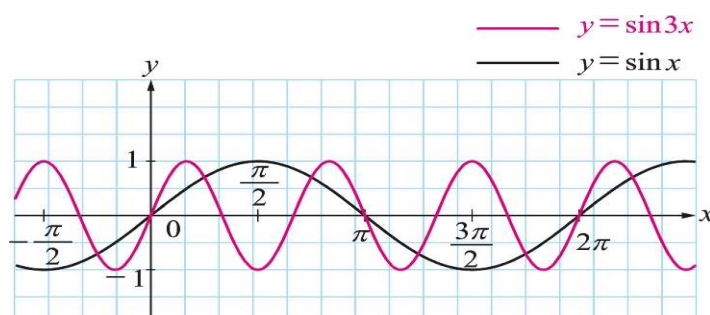
(2) $y = \sin 3x$

解 (1)



將 $y = \sin x$ 的圖形每一點的 y 坐標乘以 2，得
 $y = 2 \sin x$ 的圖形，再將 $y = 2 \sin x$ 的圖形每一點
的 y 坐標變號一次，得 $y = -2 \sin x$ 的圖形
週期 2π ，最大值為 2，最小值為 -2

(2)



將 $y = \sin x$ 的圖形每一點的 x 坐標乘以 $\frac{1}{3}$ ，
即可得 $y = \sin 3x$ 的圖形
週期 $\frac{2\pi}{3}$ ，最大值為 1，最小值為 -1

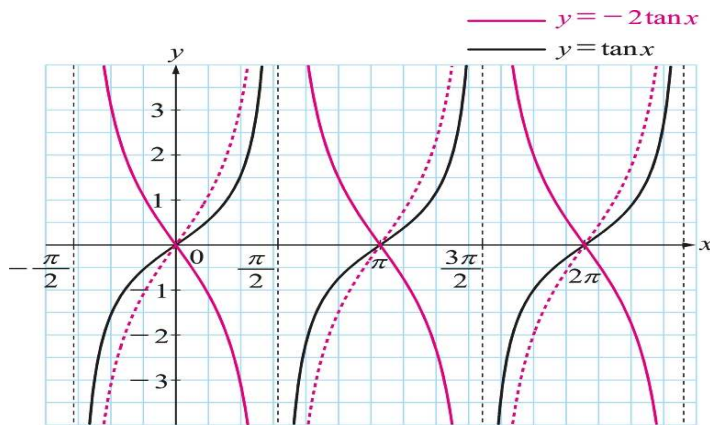
■例題 5 正切函數圖形的上下伸縮與左右伸縮

利用 $y = \tan x$ 的圖形，畫出下列各函數的圖形，並求其週期：

(1) $y = -2 \tan x$

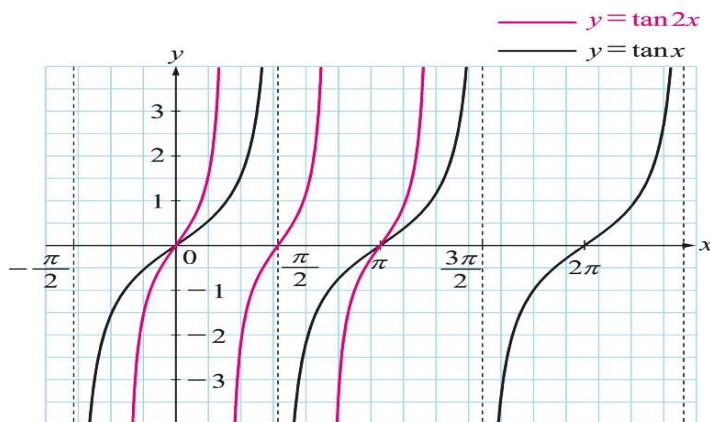
(2) $y = \tan 2x$

解 (1)



將 $y = \tan x$ 的圖形每一點的 y 坐標乘以 2，得 $y = 2 \tan x$ 的圖形，再將 $y = 2 \tan x$ 的圖形每一點的 y 坐標變號一次，得 $y = -2 \tan x$ 的圖形，週期為 π

(2)



將 $y = \tan x$ 的圖形每一點的 x 坐標乘以 $\frac{1}{2}$ ，

即可得 $y = \tan 2x$ 的圖形，週期為 $\frac{\pi}{2}$

■例題 6 用三角函數圖形解三角方程式

(1) 在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 範圍內，試求三角方程式 $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 的解

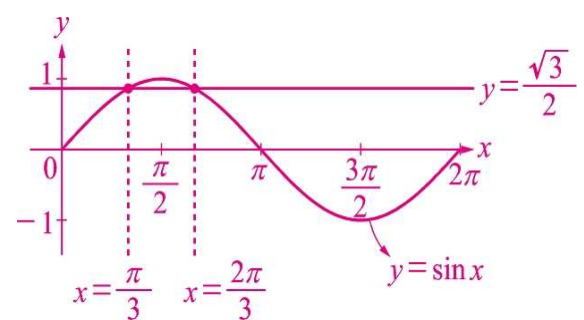
(2) 在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 範圍內，試求三角方程式 $\cos x = -\frac{1}{2}$ 的解

解 (1) 將 $y = \sin x$ 與 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 的圖形畫在同一平面上

在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 時， $y = \sin x$ 與 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

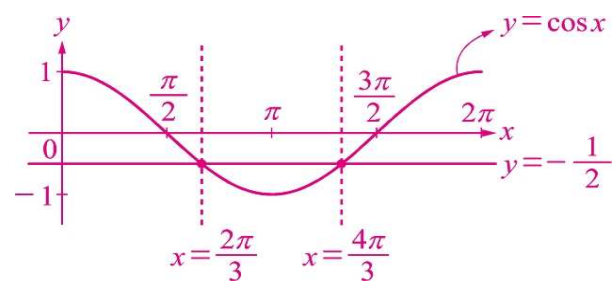
圖形有 2 交點

顯然，在此範圍內滿足 $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 的 x 為 $\frac{\pi}{3}$ ， $\frac{2\pi}{3}$



(2) 同理，作圖如右

顯然， $x = \frac{2\pi}{3}$ ， $\frac{4\pi}{3}$



■例題 7 用三角函數圖形解三角不等式

(1) 在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 範圍內，試求三角不等式 $\sin x \leq -\frac{1}{2}$ 的解

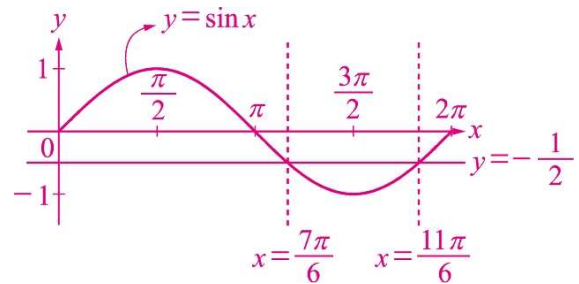
(2) 在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 範圍內，試求三角不等式 $1 \leq \tan x \leq \sqrt{3}$ 的解

解 (1) 作 $y = \sin x$ 與 $y = -\frac{1}{2}$ 的圖形

由右圖可知，當 $\frac{7\pi}{6} \leq x \leq \frac{11\pi}{6}$ 時

$y = \sin x$ 圖形在 $y = -\frac{1}{2}$ 圖形下方或兩者有共同

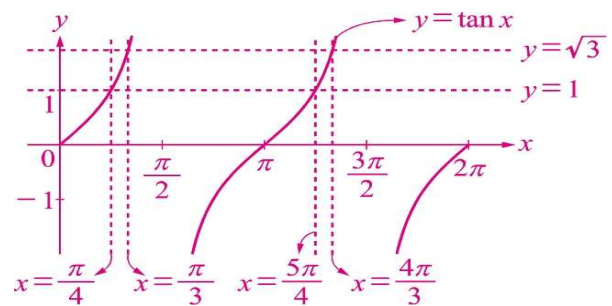
點，即 $\sin x \leq -\frac{1}{2}$



(2) 作 $y = \tan x$ ， $y = 1$ 與 $y = \sqrt{3}$ 的圖形

同理，

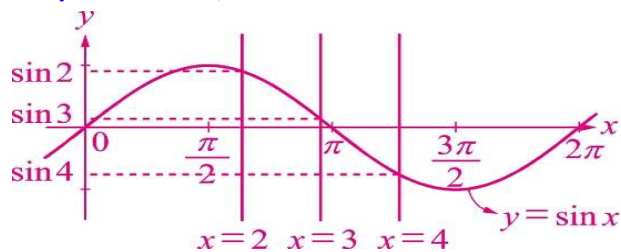
在 $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{5\pi}{4} \leq x \leq \frac{4\pi}{3}$ 時， $1 \leq \tan x \leq \sqrt{3}$



■例題 8 比較三角函數值的大小（用函數圖形比較、按計算機求值）

試比較 $\sin 2$ ， $\sin 3$ ， $\sin 4$ 的大小

解 作 $y = \sin x$ 圖形



由圖形可知 $\sin 2 > \sin 3 > \sin 4$

〈另解〉在 RAD 模式下，使用計算機求得

$$\sin 2 \approx 0.909297426$$

$$\sin 3 \approx 0.141120008$$

$$\sin 4 \approx -0.756802495$$

$$\text{故得 } \sin 2 > \sin 3 > \sin 4$$

■例題 9 三角函數的週期

試求下列各函數週期：

(1) $y = 5 \sin x$

(2) $y = \cos \frac{x}{3}$

(3) $y = \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) - 3$

(4) $y = \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) + 2$

(5) $y = \tan \frac{x}{4}$

解 (1) 2π

(2) $\frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$

(3) 2π

(4) $\frac{2\pi}{2} = \pi$

(5) $\frac{\pi}{\frac{1}{4}} = 4\pi$

■例題 10 用三角函數圖形模擬週期性現象

小華在摩天輪某車廂到達最低點時進入乘坐，假設此車廂 t 秒後距離地面的高度為

$h = f(t) = 40 \sin \left(\frac{\pi}{600} t + \frac{3\pi}{2} \right) + 80$ 公尺，試求：

- (1) 車廂離地面最高多少公尺？
- (2) 摩天輪轉一圈的週期

解 (1) $h = f(t) = 40 \sin \left(\frac{\pi}{600} t + \frac{3\pi}{2} \right) + 80$

當 $\sin \left(\frac{\pi}{600} t + \frac{3\pi}{2} \right) = 1$ 時，有最大值

此時 $h = 40 \times 1 + 80 = 120$ (公尺)

(2) 週期為 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{600}} = 1200$ (秒)