第 1 章　綜合演練詳解

符號＊為難題。

1. 點（2，－1，－3）在 z 軸的正射影坐標為________，對 z 軸的對稱點坐標為________，在 xy 平面的正射影坐標為________，對 xy 平面的對稱點坐標為________，與 x 軸的距離為________，與 yz 平面的距離為________。

解　（0，0，－3）；（－2，1，－3）；（2，－1，0）；（2，－1，3）；$\sqrt{10}$；2。

2. 判斷下列敘述何者正確？

(A)在空間中，任意兩相異直線一定有公垂線

(B)在空間中，過直線 L 外一點 P，有無限多條直線與 L 垂直

(C)在空間中，若直線 L 與平面 E 垂直，則包含 L 的每個平面都與 E 垂直

(D)在空間中，已知有兩相異平面 E 與 F，且 L_1，L_2 分別在 E，F 上，若 $E//F$，則 $L_1//L_2$

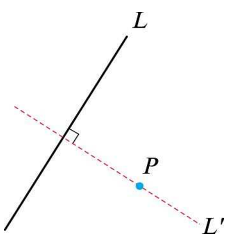
解　(A)　○：考慮平行、重合、相交於一點及歪斜的兩直線皆有公垂線

(B)　×：僅一條，如圖(一)所示

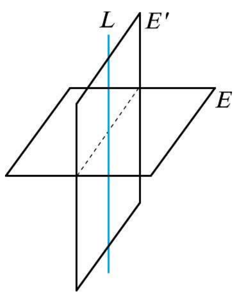
(C)　○：如圖(二)所示

(D)　×：如圖(三)所示

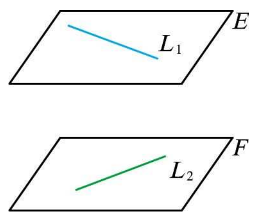
故選(A)(C)。



圖(一)



圖(二)



圖(三)

3. (1) $\vec{u}=(a，1，a+2)$，$\vec{v}=(-1，1，0)$，若 $\vec{u}\perp\vec{v}$，試求 a 值。

(2) 承(1)，試求出空間中一單位長向量 $\vec{w}$，使得 $\vec{u}$，$\vec{v}$，$\vec{w}$ 兩兩互相垂直。

解　(1)　$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ ⇨ $-a+1=0$ ⇨ $a=1$。

(2)　此時 $\vec{u}=(1，1，3)$，$\vec{v}=(-1，1，0)$，$\vec{u}\times\vec{v}=(-3，-3，2)$。

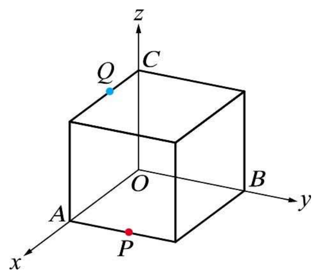
令 $\vec{w}=\dfrac{\vec{u}\times\vec{v}}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\left(\dfrac{-3}{\sqrt{22}},\dfrac{-3}{\sqrt{22}},\dfrac{2}{\sqrt{22}}\right)$。

$\vec{u}$，$\vec{v}$，$\vec{w}$ 為所求。（另有一組為 $\vec{u}$，$\vec{v}$，$-\vec{w}$）

4. 如下圖單位立方體，P，Q 為兩邊的中點，

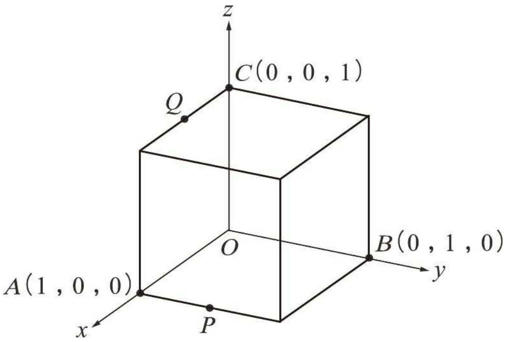
(1) 試求 $\overline{PQ}$。

(2) 將 $\overline{PQ}$ 寫成 $\overline{OA}$，$\overline{OB}$，$\overline{OC}$ 的線性組合。



解 (1) 坐標化如下圖，P，Q 兩點坐標為

$P\left(1,\frac{1}{2},0\right)$，$Q\left(\frac{1}{2},0,1\right)$，故 $\overline{PQ}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$。



(2) 因為 $\overline{OA}=(1,0,0)$，$\overline{OB}=(0,1,0)$，$\overline{OC}=(0,0,1)$，

所以 $\overline{PQ}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)=-\frac{1}{2}$（1，0，0）$-\frac{1}{2}$（0，1，0）+1（0，0，1）

$=-\frac{1}{2}\overline{OA}-\frac{1}{2}\overline{OB}+\overline{OC}$。

5. 已知 A（3，−1，2），B（2，1，1）兩點，若 C 點在 xz 平面上且△ABC 為正三角形，試求 C 點坐標。

解 令 C 點坐標為（a，0，b），因為 $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}$，

所以（a−3）^{2}+1+（b−2）^{2}=1+4+1=（a−2）^{2}+1+（b−1）^{2}，

得聯立方程式 $\begin{cases}a+b=4\\a^2+b^2-4a-2b=0\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=4\\b=0\end{cases}$，

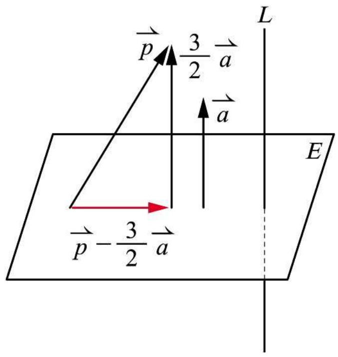
故 C 點坐標為（1，0，3）或（4，0，0）。

6. 空間向量 $\vec{a}=(1,2,1)$，直線 L 與 $\vec{a}$ 平行，平面 E 與直線 L 垂直，則向量 $\vec{p}=(3,1,4)$ 對平面 E 的正射影為何？

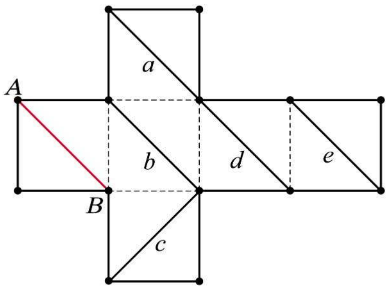
解 如下圖，$\vec{p}$ 在 $\vec{a}$ 上的正射影為

$\left(\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|^2}\right)\vec{a}=\dfrac{9}{6}\vec{a}=\dfrac{3}{2}\vec{a}$，故 $\vec{p}$ 對平面 E 的正射影為

$\vec{p}-\dfrac{3}{2}\vec{a}=(3,1,4)-\dfrac{3}{2}(1,2,1)=\left(\dfrac{3}{2},-2,\dfrac{5}{2}\right)$。

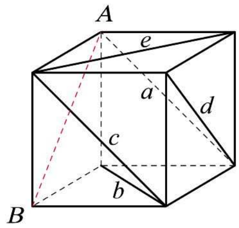


7. 將一正立方體展開如下圖，並在各面各畫上一對角線，當重新組回原正立方體時，試問線段 a、b、c、d、e 中，哪些與 $\overline{AB}$ 是歪斜？



解 組合後如下圖所示，

故得 b、c、d、e 分別與 $\overline{AB}$ 是歪斜線。



◎8. 已知 $\vec{a}=(x,y,z)$，$\vec{b}=(1,2,1)$，$\vec{c}=(-1,3,2)$，且 $x^2+y^2+z^2=140$。試求 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 所張出的平行六面體體積的最大值。

解　〔解法一〕

所求平行六面體體積為

$$\left|\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right|=\left|(x,y,z)\cdot\left(\begin{vmatrix}2&1\\3&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&2\\-1&3\end{vmatrix}\right)\right|$$

$=|(x,y,z)\cdot(1,-3,5)|$

$=|x-3y+5z|$。

由柯西不等式得

$(x^2+y^2+z^2)(1^2+(-3)^2+5^2)\geqq(x-3y+5z)^2$，

即 $(x-3y+5z)^2\leqq 140\times 35$，得 $-70\leqq x-3y+5z\leqq 70$，

因此所求平行六面體體積最大值為 70。

〔解法二〕

$\vec{b}$ 和 $\vec{c}$ 所張出的平行四邊形面積為 $\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|=\left|(1,-3,5)\right|=\sqrt{35}$，

又 $\vec{a}$ 的長度為 $\left|\vec{a}\right|=\left|(x,y,z)\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{140}=2\sqrt{35}$，

所以當 $\vec{a}$ 與兩向量 $\vec{b}$，$\vec{c}$ 所張出的平面垂直時，

所求平行六面體有最大體積 $\sqrt{35}\times 2\sqrt{35}=70$。

＊◎9. 試求 k 的範圍使得行列式：$\begin{vmatrix}1&1&k\\1&k&k\\k&k&k\end{vmatrix}$ 的值不為 0。

解　$\begin{vmatrix}1&1&k\\1&k&k\\k&k&k\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}1&1&1\\1&k&1\\k&k&1\end{vmatrix}\neq 0$，故 $k\neq 0$，$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&k&1\\k&k&1\end{vmatrix}\neq 0$，

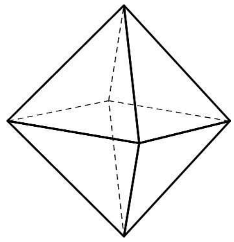
$\times(-1)$

得 $k\neq 0$，$\begin{vmatrix}0&1&1\\0&k&1\\k-1&k&1\end{vmatrix}\neq 0$，

即 $k\neq 0$，$(k-1)(1-k)\neq 0$，

故得 $k\neq 0$，1。

＊10. 下圖為一正八面體，亦即每個面都是正三角形的八面體，試求其相鄰兩面之兩面角的餘弦值。



解 令 Q 為 $\overline{AD}$ 中點，且 $\overline{AD}=a$，連接 $\overline{EQ}$，$\overline{CQ}$，

因為$\triangle ADE$，$\triangle ACD$ 皆為正三角形，

所以 $\overline{EQ}\perp\overline{AD}$，$\overline{CQ}\perp\overline{AD}$，因此

$\angle EQC$ 為平面 ADE 與平面 ACD 所夾的一個兩面角，

又 $\overline{EQ}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，$\overline{CQ}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，$\overline{CE}=\sqrt{2}a$，由餘弦定理得

$$\cos\angle EQC=\frac{\overline{EQ}^2+\overline{CQ}^2-\overline{CE}^2}{2\cdot\overline{EQ}\cdot\overline{CQ}}=\frac{\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{4}a^2-2a^2}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a}=-\frac{1}{3}，$$

所以此兩面角為鈍角且餘弦值為$-\dfrac{1}{3}$。