習題 1-2 詳解

一、基本題

1. 設 $\vec{u}=(-2,1,5)$，$\vec{v}=(1,3,4)$，試求$|\vec{u}-\vec{v}|$與$|-3\vec{u}+2\vec{v}|$。

解：$|\vec{u}-\vec{v}|=|(-3,-2,1)|=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{14}$，

$|-3\vec{u}+2\vec{v}|=|-3(-2,1,5)+2(1,3,4)|=|(8,3,-7)|=\sqrt{64+9+49}=\sqrt{122}$。

2. 坐標空間中一平行四邊形 $ABCD$ 的三頂點分別是 A（2，1，3），B（3，5，2），C（1，4，6），試求頂點 D 的坐標。

解：$\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 中點相同，若 D 點坐標為（a，b，c），

則$\left(\frac{2+1}{2},\frac{1+4}{2},\frac{3+6}{2}\right)=\left(\frac{3+a}{2},\frac{5+b}{2},\frac{2+c}{2}\right)$，得 $a=0$，$b=0$，$c=7$，

故 D 點坐標為（0，0，7）

3. 設向量 $\vec{a}=(1,1,1)$，$\vec{b}$ 的長度為 1，且 $\vec{b}$ 與 $\vec{a}$ 平行，

(1)若 $\vec{b}$ 與 $\vec{a}$ 同方向，試求 $\vec{b}$。

(2)若 $\vec{b}$ 與 $\vec{a}$ 反方向，試求 $\vec{b}$。

解：(1) $\vec{b}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$。

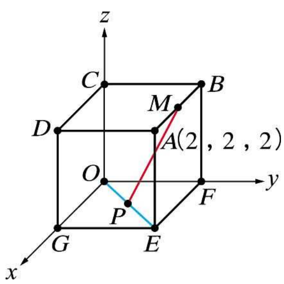
(2) $\vec{b}=-\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=-\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$。

4. 如下圖，坐標空間中一正方體，頂點 A 的坐標為（2，2，2），M 在 AB 線段上，且$\overline{MA}$：$\overline{MB}$＝1：2，P 為 $\overline{OE}$ 的中點，試求：

(1) M 點坐標。

(2) P 點坐標。

(3) $\overline{MP}$ 的長度。



解：(1) 由分點公式，$\overline{OM}=\frac{2\cdot\overline{OA}+1\cdot\overline{OB}}{1+2}$，

又 A（2，2，2），B（0，2，2）故 $M\left(\frac{4}{3},2,2\right)$。

(2) 由中點公式，$\overline{OP}=\frac{1}{2}\overline{OE}=\frac{1}{2}$（2，2，0）＝（1，1，0）∴$P$（1，1，0）。

(3) $\overline{MP}=\sqrt{\left(\frac{4}{3}-1\right)^2+(2-1)^2+(2-0)^2}=\frac{\sqrt{46}}{3}$。

二、進階題

5.已知 A（1，2，4），B（3，6，7）為坐標空間中兩點，過 A，B 分別作直線垂直 xy 平面，設垂足為 A'，B'，試求 $\overline{A'B'}$ 長。

解：由題意知 A'、B' 的坐標分別為（1，2，0）、（3，6，0），

故 $\overline{A'B'}$ 的長為 $\sqrt{(3-1)^2+(6-2)^2+(0-0)^2}=2\sqrt{5}$。

6. 已知 $\vec{a}=(-3,1,2)$，$\vec{b}=(1,3,1)$，$\vec{c}=(-11,-5,3)$，若 $\vec{c}$ 表示成 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 的線性組合為 $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$，其中 x，y 為實數，試求 x，y 的值。

解：$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$，即（$-11$，$-5$，3）＝（$-3x+y$，$x+3y$，$2x+y$）。

解 $\begin{cases}-3x+y=-11\\ x+3y=-5\\ 2x+y=3\end{cases}$，得 $\begin{cases}x=\frac{14}{5}\\ y=-\frac{13}{5}\end{cases}$。

7. 坐標空間中，已知 $\overline{OA}=(1,2,2)$，$\overline{OB}=(-1,2,3)$，$\overline{OP}=s\overline{OA}+t\overline{OB}$，$s$，$t$ 為實數，

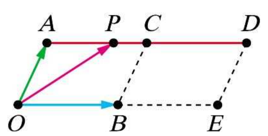
(1)若 $s=1$，$0\leqq t\leqq 2$，試描述 P 點所形成的圖形。

(2)若 $0\leqq s\leqq 2$，$0\leqq t\leqq 3$，試求所有 P 點所形成區域的面積是 $\overline{OA}$，$\overline{OB}$ 所張平行四邊形面積的多少倍？

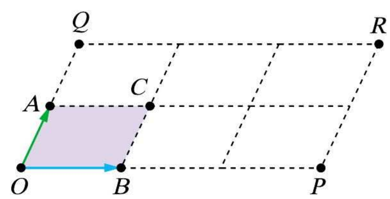
解：(1)如圖(一)，為一線段 AD，其中 $\overline{AD}=2\overline{AC}=2\overline{OB}$。

(2)如圖(二)，P 點所形成的區域為平行四邊形 $OQRS$，

平行四邊形 $OQRS$ 面積為 6 倍的平行四邊形 $OACB$ 面積。



圖(一)



圖(二)

8. 坐標空間中，已知 A（1，0，1），B（−1，3，2），C 三點共線，且 C 點位於 xy 平面上，試求 C 點坐標。

解：令 C 點坐標為（x，y，0），

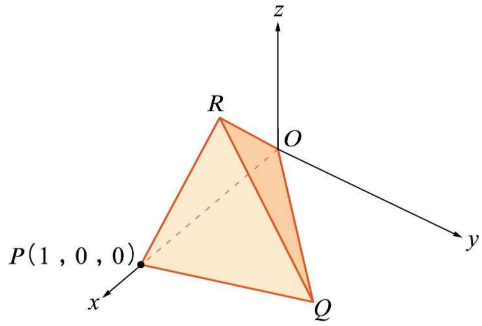
$\overline{AC}$ ＝（x−1，y，−1）與 $\overline{AB}$ ＝（−2，3，1）平行，所以 $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{-1}{1}$，

得 x＝3，y＝−3，故 C 點坐標為（3，−3，0）。

9. 如下圖的正四面體，△OPQ 在 xy 平面上，O 為原點，且 P（1，0，0），試求：

(1) Q 點坐標。

(2) R 點坐標。



解：(1) ∵△OPQ 在 xy 平面上，且由右圖可知 Q 點 x，y 坐標皆為正。

M 為 $\overline{OP}$ 中點，則△PQM 為 30°−60°−90° 三角形，

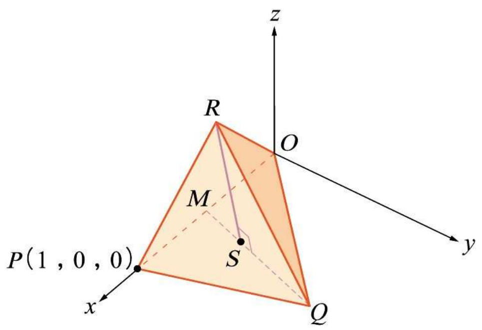
故 $\overline{PM}=\dfrac{1}{2}$，$\overline{MQ}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，因此 $Q\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$。

(2) R 在 △OPQ 的正射影為 S，S 是 △OPQ 的重心，

故 $S\left(\dfrac{1+\frac{1}{2}+0}{3},\dfrac{0+\frac{\sqrt{3}}{2}+0}{3},0\right)=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{6},0\right)$， 所以可令 $R\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{6},z\right)$，

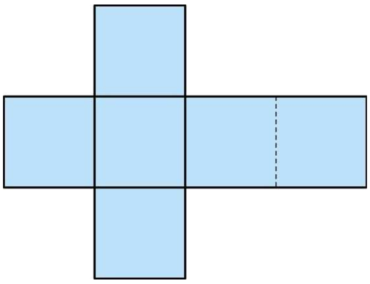
$\overline{OR}=1$，所以 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)^2+z^2=1$，

得 $z=\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，故 $R\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{6},\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$。

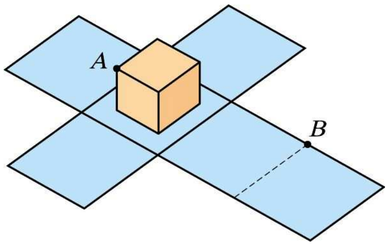


三、挑戰題

10. 一邊長是 4 的正立方體的包裝盒展開如圖(一)所示，在盒底（藍色）正中央擺上邊長是 2 的正立方體蛋糕如圖(二)，試問包裝後 A 與 B 的距離為何？



圖(一)



圖(二)

解：假設包裝後如下圖所示，並設包裝盒底部一頂點坐標為 O（0，0，0），
坐標化可得 A（1，1，2）、B（4，4，4），
故得 $\overline{AB}=\sqrt{(4-1)^2+(4-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{22}$。