# 1-3　空間向量的內積

## 重點一　空間向量的內積

**例題 1**

設 $\vec{a}=(1,0,1)$，$\vec{b}=(0,2,1)$，試求：

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=$________。（5 分）

(2) $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=$________。（5 分）

**解** (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times0+0\times2+1\times1=1$

(2) $2\vec{a}-\vec{b}=2(1,0,1)-(0,2,1)$

$=(2,-2,1)$

$\vec{a}+\vec{b}=(1,2,2)$

$(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=2\times1+(-2)\times2+1\times2=0$

**例題 2**

坐標空間中有一三角形 $ABC$，$A(2,2,2)$，$B(3,1,2)$，$C(2,3,1)$，試求：

(1) $\angle BAC=$________。（5 分）

(2) $\triangle ABC$ 面積為________。（5 分）

**解** $\overrightarrow{AB}=(1,-1,0)$，$\overrightarrow{AC}=(0,1,-1)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times0+(-1)\times1+0\times(-1)=-1$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC$

$\Rightarrow -1=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\cos\angle BAC$

$\Rightarrow \cos\angle BAC=-\dfrac{1}{2}$

(1) $\angle BAC=120^\circ$

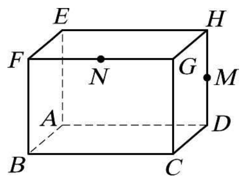
(2) $\sin\angle BAC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\triangle ABC$ 面積為$\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle BAC$

$=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

**例題 3**

如右圖，長方體 $ABCD-EFGH$ 的長、寬、高分別為 $\overline{AD}=6$、$\overline{AB}=2$、$\overline{AE}=4$，若 $M$ 為 $\overline{DH}$ 的中點，$N$ 為 $\overline{FG}$ 的中點，則 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}=$________。（10 分）




**解**　建立空間坐標系，如右圖

$A(0,0,0)$，

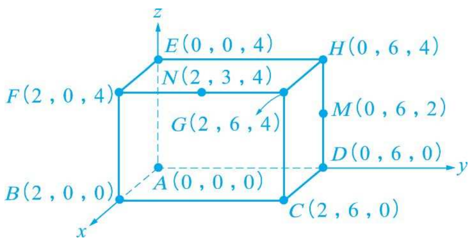
$B(2,0,0)$，

$M(0,6,2)$，

$N(2,3,4)$

則 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}=(0,6,2)\cdot(0,3,4)$

$=0+18+8=26$




**例題 4**

空間中兩向量 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 之間的夾角是 $60^\circ$ 且大小分別是 2 與 3，試求：

(1) $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}|$。（5 分）

(2) $|3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}|$。（5 分）

**解**　(1) $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}|^2=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD})$

$=|\overrightarrow{AB}|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+|\overrightarrow{CD}|^2$

$=4-2\times2\times3\times\cos60^\circ+9=7$

$\therefore |\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}|=\sqrt{7}$

(2) $|3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}|^2=(3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD})\cdot(3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD})$

$=9|\overrightarrow{AB}|^2-12\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+4|\overrightarrow{CD}|^2$

$=9\times4-12\times2\times3\times\cos60^\circ+4\times9=36$

$\therefore |3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{CD}|=6$

**例題 5**

設 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 為空間中兩向量，

(1) 若 $|\vec{a}+\vec{b}|=4$，$|\vec{a}-\vec{b}|=2$，則 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$________。(5 分)

(2) 若 $\vec{a}+2\vec{b}=\vec{0}$，$|\vec{b}|=1$，則 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$________。(5 分)

**解**　(1) $\begin{cases}|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=16\cdots\cdots① \\ |\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4\cdots\cdots②\end{cases}$

由①－②得 $4\vec{a}\cdot\vec{b}=12$　$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=3$

(2) 由 $\vec{a}+2\vec{b}=\vec{0}$ 得 $\vec{a}=-2\vec{b}$

並得知 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 反向，且 $|\vec{a}|=2|\vec{b}|=2$

故 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos180^\circ=2\times1\times(-1)=-2$

**例題 6**

已知坐標空間中，$A(1,2,1)$，$B(-1,2,1)$ 兩點，設點 $P$ 是 $y$ 軸上一點，若 $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB}$，試求 $P$ 點坐標。(10 分)

**解**　設 $P$ 點坐標為 $(0,t,0)$

因為 $\overrightarrow{PA}=(1,2-t,1)$，$\overrightarrow{PB}=(-1,2-t,1)$，且 $\overrightarrow{PA}\perp\overrightarrow{PB}$

所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$

因此 $1\times(-1)+(2-t)\times(2-t)+1\times1=0 \Rightarrow t^2-4t+4=0$

得 $t=2$，故 $P$ 點坐標為 $(0,2,0)$

**例題 7**

設空間中兩向量$\vec{a}$，$\vec{b}$滿足$|\vec{b}|=2|\vec{a}|$，且$\vec{a}+\vec{b}$與$5\vec{a}-2\vec{b}$垂直，則$\vec{a}$與$\vec{b}$夾角的餘弦值為________。（10 分）

**解**　$\because \vec{a}+\vec{b}$與$5\vec{a}-2\vec{b}$垂直

$\therefore (\vec{a}+\vec{b})\cdot(5\vec{a}-2\vec{b})=0$

$\Rightarrow 5|\vec{a}|^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2=0$，又$|\vec{b}|=2|\vec{a}|$

因此$5|\vec{a}|^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}-8|\vec{a}|^2=0 \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2$

故$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\ |\vec{b}|}=\dfrac{|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|\times 2|\vec{a}|}=\dfrac{1}{2}$

**重點二　柯西不等式**

**例題 8**

若$x$，$y$，$z$是實數，且$x+2y+2z=9$，求$x^2+y^2+z^2$的最小值，及當最小值發生時，$x$，$y$，$z$的值。（10 分）

**解**　由柯西不等式知$(x^2+y^2+z^2)(1^2+2^2+2^2)\geq(x+2y+2z)^2$

即$(x^2+y^2+z^2)\times 9\geq 9^2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2\geq 9$

$\therefore x^2+y^2+z^2$的最小值為 9

當$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{2}$時，等號成立

令$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{2}=t$，即$x=t$，$y=2t$，$z=2t$，

代入$x+2y+2z=9$，得$t=1$

故$x^2+y^2+z^2$的最小值為 9 時，$x=1$，$y=2$，$z=2$

**例題 9**

若 $x$，$y$，$z$ 為實數，滿足 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=4$，試求 $x+2y+2z$ 的範圍為________。（10 分）

**解**　由柯西不等式知

$[(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2](1^2+2^2+2^2)\geq[(x-1)+(2y-4)+(2z-6)]^2$

即 $4\times 9\geq(x+2y+2z-11)^2 \Rightarrow -6\leq x+2y+2z-11\leq 6$

故 $5\leq x+2y+2z\leq 17$

**重點三　正射影**

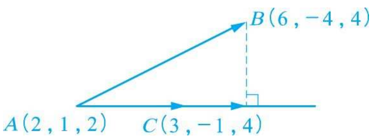
**例題 10**

空間中三點 $A(2,1,2)$，$B(6,-4,4)$，$C(3,-1,4)$，試求：

(1) $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上之正射影為________。（6 分）

(2) $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上之正射影長為________。（4 分）

**解**　$\overrightarrow{AB}=(4,-5,2)$，$\overrightarrow{AC}=(1,-2,2)$




(1) $\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2}\right)\overrightarrow{AC}$

$=\left(\dfrac{(4,-5,2)\cdot(1,-2,2)}{9}\right)(1,-2,2)$

$=(2,-4,4)$

(2) 正射影長為 $|(2,-4,4)|=\sqrt{2^2+(-4)^2+4^2}=6$