3-2　機率的定義與性質

重點一　古典機率的定義

例題 1

(1) 同時投擲兩顆公正骰子一次，其點數和至少為 9 點之事件為 A，則 $P(A)=$______。（5 分）

(2) 甲、乙兩人同時各擲一顆公正骰子，則甲擲出之點數大於乙擲出之點數的機率為______。（5 分）

解　(1) 樣本空間 $n(S)=6\times6=36$

∵事件 $A=\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3),(4,6),(5,5),(6,4),(5,6),(6,5),(6,6)\}$

∴$n(A)=4+3+2+1=10$，故 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{10}{36}=\dfrac{5}{18}$

(2) 樣本空間之個數 $n(S)=6\times6=36$

乙擲點數	1	2	3	4	5
甲擲點數	2～6	3～6	4～6	5～6	6

共有 $5+4+3+2+1=15$ 種情形，故求機率為 $\dfrac{15}{36}=\dfrac{5}{12}$

例題 2

有兩顆特製的骰子，點數分別為 1，3，3，6，7，8，則點數和為______點時，機率最大。（10 分）

解

由

點數和	1	3	3	6	7	8
1	2	4	4	7	8	9
3	4	6	6	9	10	11
3	4	6	6	9	10	11
6	7	9	9	12	13	14
7	8	10	10	13	14	15
8	9	11	11	14	15	16

知

點數和	2	4	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
機率	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

故點數和為 9 點時，機率最大為 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

例題 3

一袋中有編號 1，2，3 等三個白球，編號 1，2，3，4，5 等五個紅球，編號 1，2，3，4，5，6，7 等七個黑球，今任意抽取兩球，則：

(1) 同色球的機率為______。（5 分）

(2) 同號球的機率為______。（5 分）

解　由題意知袋中共有 15 個球

(1) P（同色球）$=\frac{C_2^3+C_2^5+C_2^7}{C_2^{15}}=\frac{3+10+21}{105}=\frac{34}{105}$

(2) P（同號球）$=\frac{3C_2^3+2C_2^2}{C_2^{15}}=\frac{3\times3+2\times1}{105}=\frac{11}{105}$

例題 4

寫有 1，2，3，4，……，9 各數字之 9 張卡片中任取兩張，則：

(1) 兩數字之和為偶數之機率為______。（5 分）

(2) 兩數字之積為偶數之機率為______。（5 分）

解

(1) $\dfrac{\overset{\text{奇奇}}{C^5_2}+\overset{\text{偶偶}}{C^4_2}}{C^9_2}=\dfrac{10+6}{36}=\dfrac{4}{9}$

(2) $\dfrac{\overset{\text{偶偶}}{C^4_2}+\overset{\text{偶奇}}{C^4_1C^5_1}}{C^9_2}=\dfrac{6+20}{36}=\dfrac{13}{18}$

例題 5

甲、乙、丙等 10 人任意排成一列，則：

(1) 甲、乙相鄰的機率為______。（5 分）

(2) 甲、乙、丙三人相鄰的機率為______。（5 分）

解　(1) 甲、乙相鄰的機率為 $\dfrac{9!\times 2!}{10!}=\dfrac{1}{5}$

(2) 甲、乙、丙三人相鄰的機率為 $\dfrac{8!\times 3!}{10!}=\dfrac{1}{15}$

重點二　機率的性質

例題 6

設 A，B 為兩事件，且 $P(A)=\dfrac{1}{2}$，$P(B)=\dfrac{7}{10}$，$P(A\cap B)=\dfrac{2}{5}$，則：

(1) $P(A\cup B)=$______。(5 分)

(2) $P(A\cap B')=$______。(5 分)

解　(1) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$=\frac{1}{2}+\frac{7}{10}-\frac{2}{5}=\frac{5+7-4}{10}=\frac{4}{5}$$

(2) $P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$

$$=\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$$

例題 7

班上 60 人參加英文與數學的競試，英文及格的有 40 人，數學及格的有 35 人，兩科都及格的有 20 人，現從班上任抽 1 人，設每人被抽中的機率均等，則：

(1) 被抽中的人至少有一科及格的機率為______。(5 分)

(2) 被抽中的人數學及格但英文不及格的機率為______。(5 分)

解　以 A 表示英文及格的事件，以 B 表示數學及格的事件

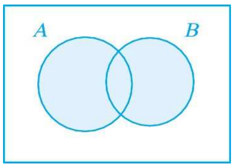
由題意知

$P(A)=\dfrac{40}{60}$，$P(B)=\dfrac{35}{60}$，$P(A\cap B)=\dfrac{20}{60}$

(1) 所求為 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$=\frac{40}{60}+\frac{35}{60}-\frac{20}{60}$$

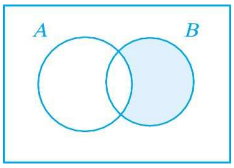
$$=\frac{55}{60}=\frac{11}{12}$$



(2) 所求為 $P(A'\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$

$$=\frac{35}{60}-\frac{20}{60}$$

$$=\frac{15}{60}=\frac{1}{4}$$



例題 8

從一副 52 張的撲克牌中抽取兩張，假設每張被抽到的機會均等，則：

(1) 兩張中沒有 A 的機率為______。（5 分）

(2) 兩張中至少一張 A 的機率為______。（5 分）

解　以 A 表示抽到至少一張 A 的事件，

則 A' 表示沒有抽到 A 的事件，則：

(1) $P(A')=\dfrac{C_2^{48}}{C_2^{52}}=\dfrac{\dfrac{48\times47}{2\times1}}{\dfrac{52\times51}{2\times1}}=\dfrac{188}{221}$

(2) $P(A)=1-P(A')=1-\dfrac{188}{221}=\dfrac{33}{221}$

例題 9

任意 5 人中，試問：

(1) 恰有 4 人在同一月分出生的機率為______。（5 分）

(2) 至少有 2 人在同一月分出生的機率為______。（5 分）

解　(1) $\dfrac{C_4^5C_1^{12}C_1^1C_1^{11}}{12^5}=\dfrac{5\times12\times1\times11}{12\times12\times12\times12\times12}=\dfrac{55}{20736}$

(2) $1-\dfrac{P_5^{12}}{12^5}=1-\dfrac{12\times11\times10\times9\times8}{12\times12\times12\times12\times12}$

$=1-\dfrac{55}{144}=\dfrac{89}{144}$

例題 10

反覆投擲一顆公正骰子，則至少應投擲多少次才會使“至少出現 1 次 4 點”的機率超過$\frac{5}{6}$？

（已知 log2≈0.3010，log3≈0.4771）（10 分）

解　若投擲 n 次皆不出現 4 點，則機率為$\left(1-\frac{1}{6}\right)^n=\left(\frac{5}{6}\right)^n$

至少出現一次 4 點的機率為 $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$

由題意知 $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n>\frac{5}{6}$

$\Rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n<\frac{1}{6} \Rightarrow \log\left(\frac{5}{6}\right)^n<\log\frac{1}{6}$

$\Rightarrow n\log\frac{5}{6}<-\log 6$

$\Rightarrow n\times(\log 5-\log 6)<-\log 6$

$\Rightarrow n\times(0.6990-0.3010-0.4771)<-(0.3010+0.4771)$

$\Rightarrow -0.0791n<-0.7781$

$\Rightarrow n>\frac{0.7781}{0.0791}=9.\cdots\cdots$，故 $n\geq 10$

至少須投擲 10 次