第2章　直線與圓

2-1　直線方程式及其圖形

1. $A(a,3)$, $B(1,1)$, $C(-2,-1)$ 為平面上三點，

(1)若 A，B，C 三點共線，求 a 之值．　(2)若 $\overline{AB}\perp\overline{BC}$，求 a 之值．

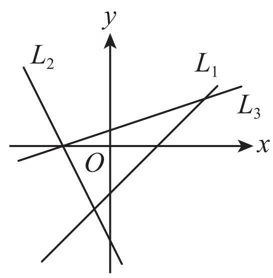
解 (1) $\overline{BC}$ 所在的直線方程式為 $2x-3y=-1$，

A, B, C 三點共線，故 $2a-3\times3=-1$，得 $a=4$．

(2) $\overline{BC}$ 斜率為 $\dfrac{-1-1}{-2-1}=\dfrac{2}{3}$，$\overline{AB}$ 斜率為 $\dfrac{1-3}{1-a}$，

$\overline{AB}\perp\overline{BC}$，故 $\left(\dfrac{1-3}{1-a}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)=-1$，得 $a=-\dfrac{1}{3}$．

2.右圖為三直線 $x-y-1=0$，$2x+y+2=0$ 與 $x-3y+1=0$ 的圖形，



(1)試判別 L_2 的方程式．　(2)試判別 L_3 的方程式．

解 (1) L_2 的斜率為負，得 $L_2: 2x+y+2=0$．

(2) L_3 的斜率小於 L_1 的斜率，得 $L_3: x-3y+1=0$．

3.求下列直線方程式：

(1)過 $(-3,5)$ 與 $(6,-1)$ 兩點的直線． (2)過 $(-3,5)$，斜率為 2 的直線．

(3)x 截距為 3，y 截距為-5 的直線． (4)通過 $(-3,5)$ 且平行 $3x+y=1$ 的直線．

解 (1)過 $(-3,5)$ 與 $(6,-1)$ 兩點的直線為 $(y-5)=\dfrac{-1-5}{6-(-3)}(x-(-3))$，

整理得 $2x+3y=9$ ．

(2)由點斜式： $y-5=2(x-(-3))$，整理得 $2x-y=-11$ ．

(3)由截距式： $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-5}=1$，整理得 $5x-3y=15$ ．

(4)設平行 $3x+y=1$ 的直線為 $3x+y=k$，通過 $(-3,5)$，故 $k=-4$，

得直線為 $3x+y=-4$ ．

4. 求通過點 $(2,3)$，且兩軸截距相等的直線方程式．

解 設 x 截距與 y 截距都為 a，

若 $a=0$，則直線過 $(2,3)$ 與 $(0,0)$，方程式為 $y=\dfrac{3}{2}x$，即 $3x-2y=0$ ．

若 $a\neq 0$，可設直線為 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}=1$，又直線過點 $(2,3)$，

則 $\dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{a}=1 \quad\Rightarrow\quad a=5$，方程式為 $\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{5}=1$，即 $x+y=5$，

故所求直線方程式為 $x+y=5$ 及 $3x-2y=0$ ．

5. 設 $A(1,a)$, $B(-3,4)$ 兩點對稱於直線 $y=ax+b$，求數對 (a,b) ．

解 A 與 B 對稱於直線，即直線是 $\overline{AB}$ 的中垂線．

$\overline{AB}$ 垂直該直線，即 $\overline{AB}$ 的斜率 $\dfrac{4-a}{-3-1}=-\dfrac{1}{a}$，得 $a=2$，

$\overline{AB}$ 的中點 $(-1,3)$ 在直線上，即 $3=-2+b$，得 $b=5$ ．

故 $(a,b)=(2,5)$ ．

6.設 $A(6,7)$, $B(-1,8)$, $C(2,9)$，求

(1)$\triangle ABC$ 的外心坐標．　(2)$\triangle ABC$ 的垂心坐標．

解 $\overline{AB}$ 的中點 $M\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{15}{2}\right)$，$\overline{AC}$ 的中點 $N(4,8)$，

$\overline{AB}$ 的斜率為 $-\dfrac{1}{7}$，$\overline{AC}$ 的斜率為 $-\dfrac{1}{2}$．

(1)外心為三中垂線交點，

$\overline{AB}$ 的中垂線： $7x-y=10$，

$\overline{AC}$ 的中垂線： $2x-y=0$，

聯立解得外心為 $(2,4)$．

(2)垂心為三高交點，

過 C 且垂直 $\overline{AB}$ 的直線： $7x-y=5$，

過 B 且垂直 $\overline{AC}$ 的直線： $2x-y=-10$，

聯立解得垂心為 $(3,16)$．

7. 若三直線 $L_1: x+3y-1=0$, $L_2: x-y+3=0$, $L_3: 2x+ky+1=0$ 不能圍成三角形，則 k 的值可能為多少？

解 三直線不能圍成三角形的情形為彼此平行或三線共點，

(1)若 L_1, L_2, L_3 共點，

解 $\begin{cases} x+3y-1=0 \\ x-y+3=0 \end{cases}$ 得 $x=-2$, $y=1$．

代入 $2x+ky+1=0$ 得 $-4+k+1=0$，即 $k=3$．

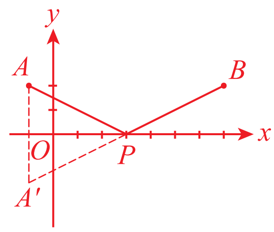
(2)若 $L_1 // L_3$，則 $-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{2}{k}$，故 $k=6$．

(3)若 $L_2 // L_3$，則 $-\dfrac{1}{-1}=-\dfrac{2}{k}$，故 $k=-2$．

故 k 的值可能為 $3, 6$ 或 -2．

8. $A(-1,2)$，$B(7,2)$，設點 P 在 x 軸上，且 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 為最小，求

(1)P 點坐標．　　(2) $\overline{PA}+\overline{PB}$ 的最小值．



解　(1)設 A 與 A' 對稱於 x 軸，則 $A'(-1,-2)$，

則 P 為 $\overline{A'B}$ 與 x 軸的交點，得 $P(3,0)$．

(2) $\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PA'}+\overline{PB}=\overline{A'B}=4\sqrt{5}$．

9. 兩直線 $L_1: tx+2y+3t=0$，$L_2:(3-t)x+(t-1)y+3=0$，

(1)若兩直線重合，求 t 的值．　(2)若兩直線平行，求 t 的值．

解　$\dfrac{t}{3-t}=\dfrac{2}{t-1} \Rightarrow t^2+t-6=0 \Rightarrow t=-3$ 或 2，

$\dfrac{2}{t-1}=\dfrac{3t}{3} \Rightarrow t^2-t-2=0 \Rightarrow t=-1$ 或 2，

(1)兩直線重合 $\Leftrightarrow \dfrac{t}{3-t}=\dfrac{2}{t-1}=\dfrac{3t}{3}$，故 $t=2$．

(2)兩直線平行 $\Leftrightarrow \dfrac{t}{3-t}=\dfrac{2}{t-1}\neq\dfrac{3t}{3}$，故 $t=-3$．

10. 將一張畫有平面坐標系的紙摺疊一次，發現點 $A(2,0)$ 對到點 $B(0,4)$，試問點 $P(4,6)$ 所對到的點 Q 的坐標．

解　$\overline{AB}$ 的中垂線 L 即是坐標平面上的摺線．

先求 $\overline{AB}$ 的中垂線 L：

因為 $\overline{AB}$ 的斜率為 $\dfrac{4-0}{0-2}=-2$，中點 $\left(\dfrac{2+0}{2},\dfrac{0+4}{2}\right)=(1,2)$，

故 $L: y-2=\dfrac{1}{2}(x-1)$，即 $L: x-2y+3=0$．

L 也是 $\overline{PQ}$ 的中垂線，過 P 且垂直 L 的直線為 $2x+y=14$，

聯立 $\begin{cases} x-2y+3=0 \\ 2x+y-14=0 \end{cases}$，解得 $\overline{PQ}$ 中點為 $(5,4)$．

設點 P 對於直線 L 的對稱點為 $Q(x,y)$，

$\overline{PQ}$ 的中點 $\left(\frac{4+x}{2},\frac{6+y}{2}\right)=(5,4)$，得 $x=6,\ y=2$，

故點 $P(4,6)$ 的對稱點為 $Q(6,2)$ 。